現代物理最前線 1

大槻義彦 編

CPの破れはどうなったか

長島順清

粉体の物理

早川尚男・那須野 悟

高速イオンビームの結晶化

岡本宏巳

共立出版株式会社

刊行にあたって

いよいよ20世紀科学文明から21世紀の科学文明に移る．20世紀の物理学を振り返れば，その進歩・発展は，想像を絶するものがある．原子・素粒子はもとより，クォークからブラックホール，宇宙のはてまで，物理学は解明してきた．そしていま，生命，脳新素材，複雑系の解明まで突き進んでいる．21世紀はどんな科学文明になるのか，考えれば，むしろ恐ろしくさえなってしまう．このような現状にあって，まず何よりも現代物理学の各分野を，十分知っておくことが要求される．わが国の物理学者，研究者，物理教育者は，他の先進国の人びとよりも，物理学の異なる分野にうといと言われる．自分の専門分野には，きわめて高い識見をもっているのに，ほんの少し専門をはずれてしまうと，知識もないし，興味ももたなくなるという傾向にあるとされる．

このような現状を少しでも改善しようとするものが，前シリーズ『物理学最前線』とか物理科学雑誌『パリティ』である．幸い，前シリーズ『物理学最前線』は好評を得て，31巻まで刊行することができた．

そこで今回，まったく新しいシリーズとして，『現代物理最前線』を世に送ることにした．前シリーズと比べて，今シリーズは現代物理の生々しい現状の最新情報を満載するものである．

2000年2月

大槻　義彦

目　次

CPの破れはどうなったか＝長島順清

粉体の物理＝早川尚男，那須野悟

高速イオンビームの結晶化＝岡本宏巳

CPの破れはどうなったか

長島順清

はじめに

CP の破れは，フィッチとクローニンにより 1964 年に発見された[1)]．あまたの精力的な努力にもかかわらず，これまではCP の破れがK メソンの 2π，$\pi l\nu$ 崩壊でしか検出できなかった．しかも効果が小さくてその確定に非常に困難な実験技術を必要としたために暗中模索が長く続いた．CP 非保存の発見より 35 年たった今，ようやく転機が訪れようとしている．CP の「直接の破れ」の存在が確定し，B ファクトリーなどB メソンセクターでの CP の破れを検証する装置があちこちで動き始め，崩壊非対称の存在を示唆するデータも出始めた．標準理論である小林–益川モデルをテストする正念場にかかったといえる．

CP の破れについての基本的概念や小林–益川モデル，そして初期 20 年の歩みについては，このシリーズ I の第 16 巻に大場氏の詳しい解説[2)]がある（以下文献 I として参照）．本書はその後の CP の破れについての発展についての解説を試みたものである．

CP が素粒子論の基本的対称性であるというだけでは，他の分野の人たちに CP の重要性をわからせるのは難しい．そこで，蛇足であることは承知ながら，「CP の効用」について述べることにした．ここは息抜きのお話として斜め読みしてもらってかまわない．しかし，CP の破れの研究のその後の発展については，単に読み物として数式なしで述べるにはあまりに専門的な話題であり，下手な類推を使ったのではかえって誤解を与える．したがって，CP，T，CPT の破れについての観測量の定義から改めて説き起こしたので，文章のスタイルが途中で大いに変わったがご容赦願いたい．

CP の予備知識のある人のために，また文献 I ですでに解説したことの繰り返しを避けるため，本文ではなるべく観測量の最近のデータに話を集中し，前提となる基本的な式の導入は付録で扱った．しかし，専門家でなくも，一応の量

子力学の知識があれば，フォローできるように論理の一貫性を心がけた．そのため多少余分な数式が並んで堅苦しい印象を与えることになった．二兎を追って両方とも逃がしたかもしれない．読者のご批判を乞う．

1章 CPの効用

1.1 オズマ問題（宇宙人に右と左を教える）

CP の破れとは何かを一口で説明するのはかなり難しい．C とは粒子と反粒子の入れ替え対称のことを指し，P とはパリティ変換あるいは鏡映変換のことを指す (図 1.1 参照)．また後に出てくる T とは時間を逆行させることである．鏡からの距離を x とすると，鏡映対称とは $x \to -x$ の変換のことであるから，厳密にいうとパリティ変換と鏡映変換とは違うが（パリティの鏡に映すと像は逆さまになる)，以下に行う議論は変わらない．

図 1.1 に示すように鏡に映すと運動方向は逆向きになるが ($\boldsymbol{p} \to -\boldsymbol{p}$)，回転の向きは変わらない．パリティ変換問題とは，基本的には鏡に映した世界がわれわれの世界にどうかかわっているかという命題に帰着し，CP 対称性はその拡張概念とみなせる．鏡を眺めると鏡の中の世界はわれわれの世界と左右が入れ替わっている．鏡の中の世界は虚像なのであろうか？　左と右が違うことはどのくらい重要なことなのであろうか．

われわれの住む世界は左右対称であろうか？　人間や動物の顔かたちはほぼ左右対称であるが厳密に対称というわけではない．朝顔の蔓や貝の渦巻きは種によって右巻きか左巻きか厳然とした区別がある．生物のもつ DNA は右巻きのらせん構造である．生物は再生産するので最初に右巻きであれば子孫代々右巻きである．しかし，最初の DNA がなぜ右巻きになったのかは理解できていない．

巨視的なレベルでの地上現象は左右非対称であっても，素粒子レベルの基本的な反応では，左右対称性は成り立つと長い間考えられていた．実際，自然を支配する 4 つの力のうち，重力，電磁力そして強い力はパリティ対称性を尊重

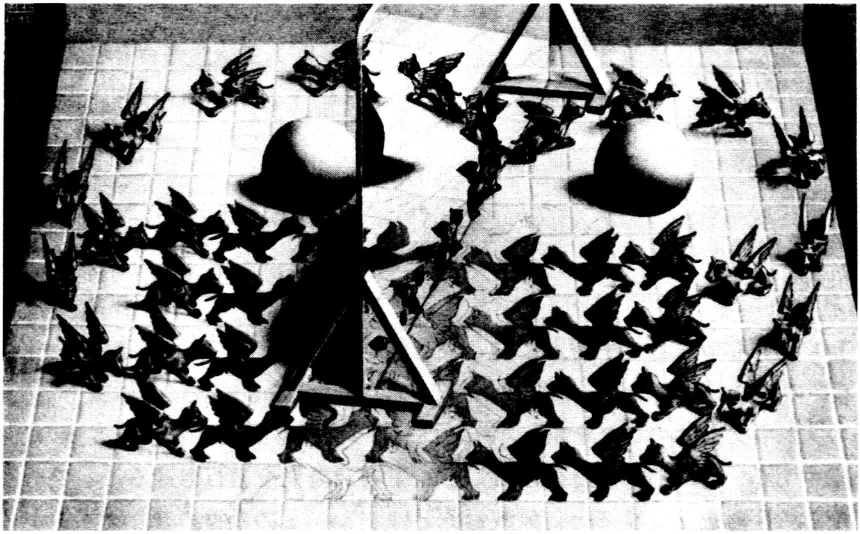


図 1.1　鏡の世界[3)]

鏡のこちらの端から現れた翼をもつ犬は向こうの端で，二手に分かれる．実の世界に出たのは黒犬で右方に向かうが(運動量 $\boldsymbol{p}$)，鏡像の方は白犬(黒犬の CP 反転像)で，左方に向かう(運動量 $-\boldsymbol{p}$)．なお，玉を向こう向きに回転させると鏡像の玉も向こう向きに回転する．すなわち，運動量は鏡映変換で符号を変えるが，回転の向きは変わらない．

するのである．この場合，われわれの世界で起こることは鏡の世界でも同様に起こりうる．すなわち，物理の法則からいえば鏡の世界があっても不思議ではない．われわれはまず左右対称な世界の考察から出発しよう．そしてこの世界で右と左の違いを見るために，右とは何か左とは何かの定義から出発しよう．

岩波の広辞苑によると，「右」とは北を向いたとき，東に当たる方とある．すなわち「右」を知るためには北と東の方角を知る必要がある．そこで今度は北と東をひいてみる．「東」とは日の出る方とあり，「北」とは日の出る方に向かって左の方向とある．これでは論理の堂々巡りである．そこで，もう少し場面を限定して考えよう．

「右手とは箸を持つ手，左手とはお茶碗を持つ手ですよ」は，お互い日本人同士なら何とか通じるであろう．イギリス人相手ならばどうであろうか？　ナイフとフォークと言い換えればよい．しかし，アラブ人相手のときはどうか？ さらにこの宇宙に知的生物が居たとして右と左を教えてやれるだろうか？　地

球外星人の乗る円盤が地球に下りてくれれば簡単に教えられるであろうが，はじめてのコンタクトが電波によるものとする．多分言葉はデジタルで符号化されて送られて来るであろう．1960 年にアメリカのドレーク博士を中心に地球外知的生物からのメッセージを電波望遠鏡で探したオズマ計画が直面した問題であるので，これをオズマ問題[4)]ということにしよう．

答えを先にいうと，左右対称の世界では，右と左を原理的に区別することはできない．この事実に最初に気が付いたのは，哲学者カントである．広辞苑の例にあるように，右と左とを定義しようと思えば，南北もしくは上下を最初に定義しなければならず，論理はかならず回ってしまい元に戻るのである．

一つの例を挙げよう．1 本の針金の上方に磁石を針金に平行に置く．針金に電流を流すと北極が電流の方向から離れる方向[†]を右と定義する．この定義で右と左が区別できるだろうか？　この定義では，磁石の北がわかっていることを前提とするが，北を知るためには地球の磁北を知らなければならない．しかし，宇宙人の住む惑星の北がわれわれのいう北と一致するだろうか？　また磁北が北にあるだろうか？　これは話し合うのが難しそうだ．そこで地球に頼らないで北を決めることを考える．

電磁気学によれば，磁石は電流を流したコイルで置き換えられる．もちろん，電流の向きは電子が流れる方向と反対方向という定義は教えておくこととする．しかし，北と南を区別するにはコイルが右巻きか左巻きかを知る必要がある．左巻きか右巻きに関係なく北を定義できないものであろうか．次のように考えてみよう．

棒を持って自分の前に置く．次に針金の一端を左手で握り他端を右手で持って棒の上から向こう側にまわし下へかつ左手から離れる方向に巻いて行く．こうして作ったコイルに左手側の端から右の方向へ電流を流す．ここでできる磁石の北は，われわれの世界であれパリティ反転した世界であれ，どちらの世界でも同じ方向を向く．さあこれでパリティ操作に関係なく北が定義できたよう

† この現象をエルステッドが 1820 年にはじめて発見したときは大変なショックだったらしい．針金の中の電流と磁針は平行であり左と右を区別する理由は何もない．対称のはずなのだ．自分の発見を信じてもらうためにエルステッドの論文には名誉ある叙勲ナイト，自然科学，医学，化学の教授等多数の証言を載せてあるそうだ[5)]．もちろん，今では回転ベクトルを導入し，右ねじと左ねじの区別をすることにより解決することを知っている．

に見える．しかし良く考えるとここでやったことは，われわれの世界で左側(あちらの世界では右側)と定義した方向が磁石の北になるとわかっただけである．左右がわからなければ北もわからない．おやおや．

1957 年に左右対称性(パリティ対称性)が成立しないとわかったときは，マイケルソン-モーレー以来の大発見だと騒がれた．「神様が左利きとは信じられない」とはパウリが言った言葉である．しかし，これで左右を相対的にではなく絶対的に定義することが可能となり，また自然界での左右非対称現象を説明する一つのヒントが与えられたことになる．

DNA がはじめて地上で合成されたとき，右巻きになったのは偶然かもしれないが，弱い相互作用が関連していたと考えることもできよう．弱い相互作用が左右非対称であることは，弱い相互作用しかしないニュートリノを見ればよい．われわれの世界には左巻きのニュートリノと右巻きの反ニュートリノは存在するが，右巻きニュートリノと左巻きの反ニュートリノは発見されていないのである．すなわち，ニュートリノが関与する実験をすれば，対照すべき基準を設けることなく絶対的に北と南が定義でき，したがって右と左も定義できるのである．それにはパリティ非保存を発見したウーの歴史的実験[6)]を再現すればよい(図 1.2)．偏極したコバルトは磁石であるから，

「偏極したコバルト ^{60}Co がベータ崩壊してニッケルになるとき，
電子がたくさん放出される方向を南と定義する」

理由はこうである．このコバルトはスピン 5，ニッケルはスピン 4 をもつ．電子と反ニュートリノはスピン 1/2 をもつので，角運動量保存則から電子と反ニュートリノのスピンはともにコバルトのスピン方向に一致しなければならない．また反ニュートリノは右巻きであるのでコバルトの偏極(スピンの向き)方向に放出され，運動量保存則から電子は反ニュートリノと反対側，すなわち偏極したコバルトの南側に放出されるのである．

さて，こうして最初のオズマ問題は解決された．しかし，CP 保存が成り立てば，議論は再び振り出しに戻る．すなわち実験の行われた世界が CP 反転した反世界であったとすれば，コバルト原子核は反陽子と反中性子でできており，ベータ崩壊で放出される粒子は，陽電子とニュートリノである．この世界では陽電子の電荷が負と定義されている．ニュートリノは左巻きであるから，この

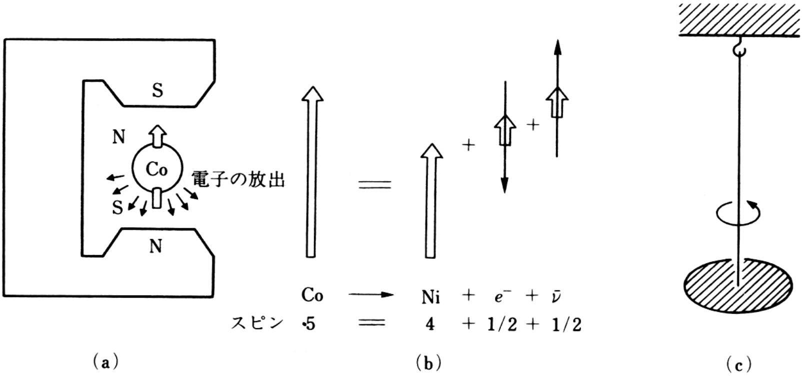


図 1.2 パリティ非保存実験

(a) 磁場を垂直上方向にかけてコバルト磁石の北が上を向くように偏極させれば，崩壊電子は南の方にたくさんでる．

(b) 電子が南方にたくさん出る訳：コバルトのスピンは 5，ニッケルは 4 で電子と反ニュートリノはそれぞれ 1/2 をもつので反ニュートリノと電子のスピンは共に上向きとなる．反ニュートリノには右巻きしか存在しないのでスピンが上を向けば運動方向（細線矢印）も上向きである．運動量保存則から電子は南へ向かわざるをえない．

(c) 巨視的に実現する方法(の原理)[7]：薄い円盤を細い針金で吊るし上面に偏極コバルトを塗布する．上方に出た電子は空中へ逃げるが下方に出た電子は円盤に吸収される．電子のスピンが円盤に移されるので円盤はスピンをもつようになり回転する．コバルトを下面に塗れば逆向きに回転するであろう．

世界では陽電子がわれわれのいう北極の方向にたくさん出るが，彼らにとっては南極なのである．左右対称の世界で左右が絶対的に決められないのと同じように，CP 対称の世界では，CP 反転の関係にある 2 つの現象は原理的に区別できないのである．

テレビの人気 SF 番組「スタートレック」ではオズマ問題に似たような場面が出現する．この番組に登場する物質輸送機は，物質を原子レベルで分解し別地点で再構築することができ，座標さえわかれば宇宙のどこへでも人間を送り込める．CP 反転した世界へも送り込めるし戻すことも可能というわけである．

ところで，輸送中に強烈な磁気嵐が起こって計器の乱れが生じ，輸送した側の世界がこちら側と同じ世界なのか CP 反転した世界なのかわからなくなってしまったとしよう．CP 反転の世界から CP を反転せずにこちら側へ輸送すれば，こちらに到着した瞬間に反物質と物質の遭遇により大爆発が起こりすべてがエネルギー化してしまうであろう．この事態を避けるためには，向こう側世

界の CP 状態を知る必要がある．このとき，こちら側でやれる実験はすべて向こう側でもやれるだけの材料や器具はそろっているものとするが，共通に観測できる物体が存在せず，言葉だけのやりとりが可能とする．TV 映像が見られるでないかという反論は成り立たない．なぜなら，TV 映像は向こうで撮影した画面を符号化してこちらに送り，こちらで一定の規則（例えば左から右へ，上から下へスキャンする）に従って再生したものである．すなわち言葉だけのやりとりと同じである．これを CP のオズマ問題と呼ぼう．もう答えはおわかりであろう．CP の破れが存在すれば CP のオズマ問題も解決する．

向こうの世界がわれわれと同じ世界か，CP 反転した世界かを探るには，次のような実験をする．陽子(向こうの世界では反陽子)を物質に衝突させると大量の K^0，$\overline{K}^0$ メソンが発生する．K メソンが崩壊するときは，短寿命の K_S と長寿命の K_L として崩壊するので，真空の長い崩壊管を通すと短寿命の K_S は崩壊してなくなり，後には長寿命の K_L のみが残るので，K_L の崩壊における電荷の非対称度 A_L を測ればよい．

$$A_{\mathrm{L}} = \frac{\Gamma(\mathrm{K_L} \to \mathrm{e}^+\pi^-\nu) - \Gamma(\mathrm{K_L} \to \mathrm{e}^-\pi^+\overline{\nu})}{\Gamma(\mathrm{K_L} \to \mathrm{e}^+\pi^-\nu) + \Gamma(\mathrm{K_L} \to \mathrm{e}^-\pi^+\overline{\nu})} \tag{1.1}$$

Γ は崩壊率であり，CP 対称性が破れていると $A_L \neq 0$ となる。実測値は正で $\sim 3.27 \times 10^{-3}$ という値をもつので，電荷が正の陽電子の放出数が電子より大きい．CP 反転の世界では，正負が逆となるから非対称は負になるはずである．すなわち，長寿命 K メソンの準レプトン崩壊において数多く出る方のレプトンの符号を正と決めればよい．

1.2　我思う．ゆえに CP の破れあり

宇宙における物質創生　　われわれの宇宙は物質「バリオン(陽子＋中性子)と電子」でできており，反物質の量はごくわずかである．1967 年にはサハロフ[8)]が，ビッグバンから現在のバリオン過剰の物質宇宙を導くには，宇宙初期において物質が反物質よりわずかに(100 億個に対し 1 個)過剰に生成されなければならないこと，そのためには CP 非保存効果が必要であることを示した．この宇宙におけるわれわれ自身の存在を保証する要因として，CP 対称性の破れは不可欠なのである．バリオン数過剰が生じるためには次の 3 条件が必要である．

(1) バリオン数保存を破る基本過程の存在

(2) CP 非保存の存在

(3) バリオン数を破る過程が進行中に熱平衡が破れる

これらの条件が必要な理由を明らかにするために，ビッグバンの火の玉の中にある原始エネルギーの塊(X ボソンと呼ぼう)を考える．非常に重い X ボソン(と反 X ボソン $\overline{\mathrm{X}}$) がバリオン数 $B_1(\overline{B}_1)$ と $B_2(\overline{B}_2)$ で特徴づけられる過程に分岐比 $b(\overline{b})$ および $1-b(1-\overline{b})$ で崩壊すると仮定する．崩壊率を Γ と書けば

$$\frac{\Gamma(\mathrm{X}\to B_1)}{\Gamma(\mathrm{X}\to All)}=b,\quad \frac{\Gamma(\mathrm{X}\to B_2)}{\Gamma(\mathrm{X}\to All)}=1-b$$
$$\frac{\Gamma(\overline{\mathrm{X}}\to \overline{B}_1)}{\Gamma(\overline{\mathrm{X}}\to All)}=\overline{b},\quad \frac{\Gamma(\overline{\mathrm{X}}\to \overline{B}_2)}{\Gamma(\overline{\mathrm{X}}\to All)}=1-\overline{b} \tag{1.2}$$

特殊相対論と量子力学の範囲では，C，P，T の 3 種の変換の合成，CPT 変換対称性は厳密に成立する定理である．CPT 定理によれば，物質と反物質の質量と寿命(全崩壊率)は等しい．すなわち

$$\Gamma(\mathrm{X}\to All)=\Gamma(\overline{\mathrm{X}}\to All) \tag{1.3}$$

であるから，最初に X と $\overline{\mathrm{X}}$ の数が等しかったとすれば，バリオン数非対称は

$$\Delta B=(b-\overline{b})B_1+\{(1-b)-(1-\overline{b})\}B_2=(B_1-B_2)(b-\overline{b}) \tag{1.4}$$

$B_1\neq B_2$ は，バリオン数保存の破れを必要とし，$b\neq\overline{b}$ は CP 非保存を意味する．

条件 (3) は次のようにしていえる．CPT 定理とユニタリティ(確率の保存原理)のみを使い

$$\sum_r \Gamma(B\to r)=\sum_{\overline{r}}\Gamma(\overline{B}\to\overline{r})=\sum_{\overline{r}}\Gamma(B\to\overline{r}) \tag{1.5}$$

がいえる．第 2 式は CPT 定理を，第 3 式はすべての粒子についての和は $\overline{r}$ と r で等しいことに使った．上式に CPT 変換を施せば粒子が反粒子に変わり，時間の向きが逆転するから

$$\sum_r \Gamma(r\to B)=\sum_r \Gamma(r\to\overline{B}) \tag{1.6}$$

熱平衡状態ではすべての r 状態は同じ数だけあるから，仮に条件 (1) と (2) が

満たされていても非対称は生じないのである．したがって宇宙膨張のある時期に熱平衡が破れるという条件が不可欠なのである．具体的な数値はモデルに依存するが，大統一理論を使えば，バリオン数非保存の妥当な値と現在の CP 非保存実験値を使用して，今日存在するバリオン数を再現できるとされている[9)].

2章　2体系の混合と保存則の破れ

CP 非保存の検証においては，正反対の香りをもつ 2 体の固有状態(ストレンジネスとか B-量子数)間の混合が大きな役割を演じる．そこで，まず 2 体系の時間変化の取り扱いを定式化し，CP 非保存の観測量をいくつか定義する．

2.1　質量行列と混合パラメータ ε

以下はイメージをはっきりさせるために，K^0 と $\overline{\mathrm{K}}^0$ について書き下ろすが，この節での議論は B^0 と $\overline{\mathrm{B}}^0$ の 2 体系にも適用できるものである．

K^0 と $\overline{\mathrm{K}}^0$ は，強い相互作用(ハミルトニアン H_S)の固有状態であり，ストレンジネス ± 1 で区別される．弱い相互作用 H_W を含めると，K^0 と $\overline{\mathrm{K}}^0$ の共通の崩壊モードが出現するので，K^0 と $\overline{\mathrm{K}}^0$ はもはや良い量子状態ではなくなり，混合すなわち時間とともに K^0 と $\overline{\mathrm{K}}^0$ が互いに移り変わるストレンジネス振動が起きる．CP が保存していれば，CP 固有値 ± 1 をもつ K_1，K_2 が良い量子状態となる．K_1，K_2 は $(\mathrm{K}^0 \pm \overline{\mathrm{K}}^0)/\sqrt{2}$ で定義される．

CP 対称性が破れているときの全体ハミルトニアン $H = H_\mathrm{S} + H_\mathrm{W}$ の固有状態を $\mathrm{K_S}$ と $\mathrm{K_L}$ とする．$\mathrm{K_S}$ と $\mathrm{K_L}$ はそれぞれ短寿命，長寿命の K メソンを表す．CP の破れが小さいときは，ε_S，ε_L を小さい量として

$$
\begin{aligned}
|\mathrm{K_S}> &= \sqrt{2}N_\mathrm{S}(|K_1> + \varepsilon_\mathrm{S}|K_2>) \\
&= N_\mathrm{S}[(1+\varepsilon_\mathrm{S})|\mathrm{K}^0> + (1-\varepsilon_\mathrm{S})|\overline{\mathrm{K}}^0>] \\
|\mathrm{K_L}> &= \sqrt{2}N_\mathrm{L}(|K_2> + \varepsilon_\mathrm{L}|K_1>) \\
&= N_\mathrm{L}[(1+\varepsilon_\mathrm{L})|\mathrm{K}^0> - (1-\varepsilon_\mathrm{L})|\overline{\mathrm{K}}^0>]
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

と表される．$N_\mathrm{S} = 1/\sqrt{2+2|\varepsilon_\mathrm{S}|^2}$ と $N_\mathrm{L} = 1/\sqrt{2+2|\varepsilon_\mathrm{L}|^2}$ は規格化因子であり，正確には異なる量であるが，ε の 1 次近似にとどまる限りは，$N_\mathrm{S} = N_\mathrm{L} =$

$N=1/\sqrt{2}$ としてよい．K_S は 2π へ，K_L は 3π，$\pi l\nu$ へと主に崩壊するので，K_S と K_L 状態としての確率振幅は時間とともに減少する．

状態関数を

$$|\psi>=\alpha|K^0>+\beta|\overline{K}^0>=\alpha'|K_S>+\beta'|K_L> \tag{2.2}$$

と書けば，状態 ψ の時間依存性を決めるシュレーディンガー方程式は，質量行列を使って次のように表せる．

$$i\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\tilde{\mathcal{M}}_{11} & \tilde{\mathcal{M}}_{12}\\ \tilde{\mathcal{M}}_{21} & \tilde{\mathcal{M}}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix} \tag{2.3}$$

時間 t が反応時間に比べて十分長いとき，質量行列は次のように表される．

$$\tilde{\mathcal{M}}_{ij}=M_{ij}-i\frac{\Gamma_{ij}}{2}\quad (i,j=|K^0>,|\overline{K}^0>) \tag{2.4}$$

M_{ij}，Γ_{ij} は，状態 K^0 と $\overline{K}^0$ の混合行列と崩壊行列を表し，付録の式 (A.29)(A.30) で与えられている．確率は保存しないから質量行列 $\tilde{\mathcal{M}}_{ij}$ はエルミートではないが，M_{ij} および Γ_{ij} はエルミートである．

式 (2.3) を対角化すれば，ψ は K_S と K_L を基底とする表示となる．

$$i\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\alpha'\\ \beta'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_S & 0\\ 0 & \lambda_L\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha'\\ \beta'\end{bmatrix} \tag{2.5}$$

$$\lambda_S=m_S-i\frac{\Gamma_S}{2},\quad \lambda_L=m_L-i\frac{\Gamma_L}{2} \tag{2.6}$$

m_S，Γ_S，m_L，Γ_L はそれぞれ K_S と K_L の質量および全崩壊幅である．式 (2.1) から (α,β) と (α',β') 間の変換行列が作れるから，質量行列は ε_S，ε_L の 1 次近似で，固有値を使って次のように表すこともできる．

$$\begin{bmatrix}\tilde{\mathcal{M}}_{11} & \tilde{\mathcal{M}}_{12}\\ \tilde{\mathcal{M}}_{21} & \tilde{\mathcal{M}}_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}M+\frac{(\varepsilon_S-\varepsilon_L)}{2}\Delta & \frac{\Delta}{2}+\frac{(\varepsilon_S+\varepsilon_L)}{2}\Delta\\ \frac{\Delta}{2}-\frac{(\varepsilon_S+\varepsilon_L)}{2}\Delta & M-\frac{(\varepsilon_S-\varepsilon_L)}{2}\Delta\end{bmatrix} \tag{2.7}$$

$$M=\frac{\lambda_S+\lambda_L}{2},\quad \Delta=\lambda_S-\lambda_L=-\Delta m-i\frac{\Delta\Gamma}{2} \tag{2.8}$$

ただし，$\Delta m=m_L-m_S$，$\Delta\Gamma=\Gamma_S-\Gamma_L$ は，実測されている K メソンの場合に正値となるように定義した．

ここで，ε と δ を次式で定義する．

$$\begin{aligned}
\varepsilon \equiv \frac{\varepsilon_{\rm S}+\varepsilon_{\rm L}}{2} &= \frac{\tilde{\mathcal{M}}_{12}-\tilde{\mathcal{M}}_{21}}{2\Delta} = \frac{-\Im M_{12}+i\Im\frac{\Gamma_{12}}{2}}{\frac{(\Gamma_{\rm S}-\Gamma_{\rm L})}{2}-i\Delta m} \\
&= \frac{\sin\phi_{\rm SW}}{\Delta m}{\rm e}^{i\phi_{\rm SW}}\left[-\Im M_{12}+i\frac{\Im\Gamma_{12}}{2}\right] \qquad (2.9)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta \equiv \frac{\varepsilon_{\rm S}-\varepsilon_{\rm L}}{2} &= \frac{\tilde{\mathcal{M}}_{11}-\tilde{\mathcal{M}}_{22}}{2\Delta} = \frac{\frac{(\Gamma_{11}-\Gamma_{22})}{2}+i(M_{11}-M_{22})}{2(\frac{\Gamma_{\rm S}-\Gamma_{\rm L}}{2}-i\Delta m)} \\
&= \frac{\sin\phi_{\rm SW}}{2\Delta m}{\rm e}^{i\phi_{\rm SW}}\left[\frac{\Gamma_{11}-\Gamma_{22}}{2}+i(M_{11}-M_{22})\right] \qquad (2.10)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta m &= 0.5301\pm0.0014\times10^{10}\hbar\,{\rm sec}^{-1} \text{ [10)]} \\
\Gamma_{\rm S} &= \hbar/\tau_{\rm S}, \quad \tau_{\rm S}=0.8934\pm0.0008\times10^{-10}\,{\rm sec} \\
\Gamma_{\rm L} &= \hbar/\tau_{\rm L}, \quad \tau_{\rm L}=5.17\pm0.04\times10^{-8}\,{\rm sec} \\
\phi_{\rm SW} &= \tan^{-1}\frac{2\Delta m}{\Gamma_{\rm S}-\Gamma_{\rm L}} = 43.49\pm0.08\,{\rm deg} \qquad (2.11)
\end{aligned}$$

$\phi_{\rm SW}$ は通常，超弱位相(superweak phase)と呼ばれる量である．CPT が保存すれば $\tilde{\mathcal{M}}_{11}=\tilde{\mathcal{M}}_{22}$，T が保存すれば $\tilde{\mathcal{M}}_{12}=\tilde{\mathcal{M}}_{21}$，CP が保存すれば $\tilde{\mathcal{M}}_{11}=\tilde{\mathcal{M}}_{22}$，かつ $\tilde{\mathcal{M}}_{12}=\tilde{\mathcal{M}}_{21}$ であるので (付録 A.1 参照)，δ は CPT の破れを，ε は T の破れを，そして $\varepsilon_{\rm S}$ と $\varepsilon_{\rm L}$ が CP の破れを表すパラメータであることがわかる．CPT が保存すれば

$$\varepsilon_{\rm S}=\varepsilon_{\rm L}=\varepsilon \qquad (2.12)$$

であり，これが通常使われる CP の混合パラメータであるが，CPT 保存を仮定しないときの混合パラメータには 2 つあり，一般的には $\varepsilon_{\rm S}\neq\varepsilon_{\rm L}$ であることに注意しよう．

なお，後に使うので CPT 保存 ($\delta=0$) のときの Δ と $\tilde{\mathcal{M}}_{ij}$ との関係式を揚げておく．

$$\begin{aligned}
\Delta &= \lambda_{\rm S}-\lambda_{\rm L} = -2\sqrt{\tilde{\mathcal{M}}_{12}\tilde{\mathcal{M}}_{21}} \\
(\Delta m, \Delta\Gamma) &= (2\Re, 4\Im)\sqrt{\left[\left(M_{12}-i\frac{\Gamma_{12}}{2}\right)\left(M_{12}^*-i\frac{\Gamma_{12}^*}{2}\right)\right]} \qquad (2.13)
\end{aligned}$$

また，$p = N(1+\varepsilon)$，$q = N(1-\varepsilon)$ という混合変数もよく使われる．

$$\frac{q}{p} = \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} = \sqrt{\frac{\tilde{\mathcal{M}}_{21}}{\tilde{\mathcal{M}}_{12}}} \tag{2.14}$$

2.2 混合の時間発展と T，CPT 対称性

時刻 $t=0$ において，純粋な K^0 状態が作られたとき，その後の時間発展を考察しよう．式 (2.1) を逆に解き，$|\mathrm{K}_{\mathrm{S,L}}(t)>=|\mathrm{K}_{\mathrm{S,L}}(0)>\mathrm{e}^{-i\lambda_{\mathrm{S,L}}t}$ を考慮すると，ε，δ の 1 次近似で

$$\begin{aligned}
|\mathrm{K}^0(t)> &= N[(1-\varepsilon_{\mathrm{L}})|\mathrm{K}_{\mathrm{S}}>\mathrm{e}^{-i\lambda_{\mathrm{S}}t} + (1-\varepsilon_{\mathrm{S}})|\mathrm{K}_{\mathrm{L}}>\mathrm{e}^{-i\lambda_{\mathrm{L}}t}] \\
&= [f_+(t)+2\delta f_-(t)]|\mathrm{K}^0> + [(1-2\varepsilon)f_-(t)]|\overline{\mathrm{K}}^0> \\
|\overline{\mathrm{K}}^0(t)> &= N[(1+\varepsilon_{\mathrm{L}})|\mathrm{K}_{\mathrm{S}}>\mathrm{e}^{-i\lambda_{\mathrm{S}}t} - (1+\varepsilon_{\mathrm{S}})|\mathrm{K}_{\mathrm{L}}>\mathrm{e}^{-i\lambda_{\mathrm{L}}t}] \\
&= [(1+2\varepsilon)f_-(t)]|\mathrm{K}^0> + [f_+(t)-2\delta f_-(t)]|\overline{\mathrm{K}}^0>
\end{aligned} \tag{2.15}$$

$$f_\pm = [\mathrm{e}^{-i\lambda_{\mathrm{S}}t} \pm \mathrm{e}^{-i\lambda_{\mathrm{L}}t}]/2 \tag{2.16}$$

が得られ，これから混合 ($\mathrm{K}^0 \leftrightarrow \overline{\mathrm{K}}^0$) の割合が計算できる．

$$\begin{aligned}
P(\mathrm{K}^0 \to \mathrm{K}^0; t) &= |<\mathrm{K}^0|\mathrm{K}^0(t)>|^2 = |\{f_+(t)+2\delta f_-(t)\}|^2 \\
P(\overline{\mathrm{K}}^0 \to \overline{\mathrm{K}}^0; t) &= |<\overline{\mathrm{K}}^0|\overline{\mathrm{K}}^0(t)>|^2 = |\{f_+(t)-2\delta f_-(t)\}|^2
\end{aligned} \tag{2.17}$$

$$\begin{aligned}
P(\overline{\mathrm{K}}^0 \to \mathrm{K}^0; t) &= |<\mathrm{K}^0|\overline{\mathrm{K}}^0(t)>|^2 = |(1+2\varepsilon)f_-(t)|^2 \\
P(\mathrm{K}^0 \to \overline{\mathrm{K}}^0; t) &= |<\overline{\mathrm{K}}^0|\mathrm{K}^0(t)>|^2 = |(1-2\varepsilon)f_-(t)|^2
\end{aligned} \tag{2.18}$$

となる．K^0 と $\overline{\mathrm{K}}^0$ は互いに CP 変換の関係にあり，$P(\overline{\mathrm{K}}^0 \to \mathrm{K}^0; t)$ と $P(\mathrm{K}^0 \to \overline{\mathrm{K}}^0; t)$ は，時間に関して相反関係にあるから，上式で表される混合の非対称は，CPT 保存則と時間反転対称性の保存則のテストになる．

この混合率の非対称を計算すると

$$A_{\mathrm{CPT}} = \frac{P(\overline{\mathrm{K}}^0 \to \overline{\mathrm{K}}^0; t) - P(\mathrm{K}^0 \to \mathrm{K}^0; t)}{P(\overline{\mathrm{K}}^0 \to \overline{\mathrm{K}}^0; t) + P(\mathrm{K}^0 \to \mathrm{K}^0; t)} \approx 4\Re\delta \quad : t \gg \Gamma_{\mathrm{S}}^{-1} \tag{2.19}$$

$$A_{\mathrm{T}} = \frac{P(\overline{\mathrm{K}}^0 \to \mathrm{K}^0; t) - P(\mathrm{K}^0 \to \overline{\mathrm{K}}^0; t)}{P(\overline{\mathrm{K}}^0 \to \mathrm{K}^0; t) + P(\mathrm{K}^0 \to \overline{\mathrm{K}}^0; t)} = 4\Re\varepsilon \tag{2.20}$$

T 非保存を表すパラメータ $A_{\rm T}$ は時間 t に依存しない定数であることに注目しよう．$\delta = (\varepsilon_{\rm S} - \varepsilon_{\rm L})/2$ が CPT の破れを，$\varepsilon = (\varepsilon_{\rm S} + \varepsilon_{\rm L})/2$ が時間反転の破れを表すパラメータであることはすでに議論した．

3章 中性Kメソン崩壊とCPの破れ

3.1 CPの直接の破れ

$\varepsilon_{\mathrm{S,L}}$ は，CPの破れが K^0 と $\overline{\mathrm{K}}^0$ の混合（$\Delta S=2$ 遷移）を通して現れるとき（CPの間接の破れという）のパラメータである．CPの破れは質量行列のみならず崩壊過程（$\Delta S=1$ 遷移）にも現れると考えられる．崩壊反応において

$$\delta\Gamma = \Gamma(\mathrm{K}\to f) - \Gamma(\overline{\mathrm{K}}\to \overline{f}) \neq 0 \tag{3.1}$$

であればCPは破れている．これをCPの直接の破れという．

今，議論を簡単にするためにCPT保存を仮定すれば，崩壊振幅は次のように書ける（付録A.2参照）．

$$\begin{aligned} A(\mathrm{K}\to f) &= \sum_i D_i \mathrm{e}^{i\delta_i} = \sum_i |D_i|\mathrm{e}^{i\phi_{\mathrm{W}_i}}\mathrm{e}^{i\delta_i} \\ A(\overline{\mathrm{K}}\to \overline{f}) &= \sum_i D_i^* \mathrm{e}^{i\delta_i} = \sum_i |D_i|\mathrm{e}^{-i\phi_{\mathrm{W}_i}}\mathrm{e}^{i\delta_i} \end{aligned} \tag{3.2}$$

i は中間状態の異なる振幅を区別する指標で，D_i が崩壊振幅，ϕ_{W_i}，δ_i はそれぞれ崩壊振幅の弱い相互作用による位相と強い相互作用による終状態の散乱位相を表す．CPの破れは $D_i^* \neq D_i$ を意味するが，実験観測条件 $\delta\Gamma \neq 0$ を満たすためには干渉項が必要であり，少なくも2種類以上の中間状態を必要とする．

中間状態が2つあるときの $\delta\Gamma$ を計算すると

$$\delta\Gamma = |D_1 D_2| \sin(\phi_{\mathrm{W}_1} - \phi_{\mathrm{W}_2}) \sin(\delta_1 - \delta_2) \tag{3.3}$$

となるので，CPの直接の破れを見るためには2つの中間状態からの弱位相と散乱位相がともに異なっていなければならないことがわかる．CPの破れが観

測されている $K \to \pi\pi$ の終状態にはアイソスピン I が 0 と 2 の 2 種類あるので直接の破れを検証することが可能である．

ここで，実験的に観測されている K の崩壊における CP の破れのパラメータの中から，次の 3 つのパラメータを選んで議論する．歴史的にはフィッチ-クローニンが，最初に $K_L \to 2\pi$ の存在すなわち $|\eta \neq 0|$ を発見したのであった．

$$\eta_{+-} = \frac{<\pi^+\pi^-|T|K_L>}{<\pi^+\pi^-|T|K_S>} = \frac{\varepsilon_0+\varepsilon_2}{1+\omega} \approx \varepsilon_0 + \varepsilon' \tag{3.4}$$

$$\eta_{00} = \frac{<\pi^0\pi^0|T|K_L>}{<\pi^0\pi^0|T|K_S>} = \frac{\varepsilon_0-2\varepsilon_2}{1-2\omega} \approx \varepsilon_0 - 2\varepsilon' \tag{3.5}$$

$$<e^+\pi^-\nu|T|K^0> = A_{Kl\nu}(1-y) \tag{3.6}$$

$$A_L = \frac{\Gamma(K_L \to e^+\pi^-\nu) - \Gamma(K_L \to e^-\pi^+\overline{\nu})}{\Gamma(K_L \to e^+\pi^-\nu) + \Gamma(K_L \to e^-\pi^+\overline{\nu})}$$

$$= 2(\Re\varepsilon_L - \Re y) \qquad : t \gg \Gamma_S^{-1} \tag{3.7}$$

ここで，$<\pi^+\pi^-|T|K_L>$ 等は $K_L \to \pi^+\pi^-$ 等への崩壊振幅を表し，$\Gamma(K_L \to e^+\pi^-\nu)$ は $K_L \to e^+\pi^-\nu$ 等への部分崩壊幅を表すものとする．$\varepsilon_0, \varepsilon'$ は，アイソスピン 0, 2 状態への崩壊における CP の破れ，y は崩壊振幅における（直接の）CPT の破れを表すパラメータである（付録 A.3 を参照）．ε_0 は混合パラメータ ε_L と同一視しうる量であり，ε' が直接の破れを表すパラメータである．$\eta_{\pi\pi}$ は，実験的には，K^0 と $\overline{K}^0$ の 2π 崩壊の干渉と時間依存性を測定して決めることができる[10)]．A_L は，K^0 もしくは $\overline{K}^0$ を十分長い距離 $L(L \gg 10L_S; L_S = \gamma c\tau_S = K_S$ の崩壊長）を飛ばして長寿命の K_L のみを残し，さらに長い距離 $(L \gg 20L_S)$ を飛ばした後のレプトン非対称を測定して決められる．

$$|\eta_{+-}| = 2.275 \pm 0.019 \times 10^{-3}, \quad \phi_{+-} = \arg\eta_{+-} = 43.4 \pm 0.6\,\mathrm{deg}$$

$$|\eta_{00}| = 2.275 \pm 0.019 \times 10^{-3}, \quad \phi_{00} = \arg\eta_{00} = 43.4 \pm 1.0\,\mathrm{deg}$$

$$\Delta\phi \equiv \phi_{00} - \phi_{+-} = -0.1 \pm 0.80\,\mathrm{deg} \tag{3.8}$$

$$A_L = 3.27 \pm 0.012 \times 10^{-3} \tag{3.9}$$

3.2　KTEV と NA48 の実験

データは $\eta_{+-} \approx \eta_{00} \approx \varepsilon_0$，すなわち $|\varepsilon_0| \gg |\varepsilon'|$ を示す．実際 $\varepsilon' \sim 0$ を示す

実験もあった．もしこれが正しいとすると，CP を破る機構としていわゆる超弱相互作用 (super weak interaction) モデルが有力となる．これは，CP の破れが $\Delta S = 2$ の相互作用のみに現れるとする理論で，$\Delta S = 1$ 反応の崩壊には現れない．すなわち直接の破れはないとするモデルであり，標準理論である小林–益川モデルとは異なる．小林–益川モデルは，後述するように ε_0 の実験値を再現することができ，さらに小さくはあるが有限の ε' を予言する．そして B 崩壊に対して大きな非対称の存在を予言するので，直接の破れがあるかどうかは大きな関心事であった．

非常に小さな ε' を測定するには，次式で定義される二重崩壊比を測定するのがよい．

$$R = \frac{\Gamma(\mathrm{K_L} \to \pi^+\pi^-)}{\Gamma(\mathrm{K_S} \to \pi^+\pi^-)} \Bigg/ \frac{\Gamma(\mathrm{K_L} \to \pi^0\pi^0)}{\Gamma(\mathrm{K_S} \to \pi^0\pi^0)} = 1 + 6\Re\left(\frac{\varepsilon'}{\varepsilon_0}\right) \tag{3.10}$$

二重の比をとることにより実験的な系統誤差は大いに軽減されるが，それでも $\Re(\varepsilon'/\varepsilon_0)$ は，$\sim 10^{-3}$ 程度の小さい値をもつので非常に困難な実験である．主な実験は米国のフェルミ研究所と CERN で行われた．つい先頃までは，相反するデータを出して混乱していたが[11,12]，最近やり直した結果では両者がほぼ一致したようである．

$$\Re\left(\frac{\varepsilon'}{\varepsilon_0}\right) = \begin{cases} (28.0 \pm 4.1) \times 10^{-4} : KTeV^{13)} \\ (18.5 \pm 7.3) \times 10^{-4} : NA48^{14)} \end{cases} \tag{3.11}$$

$\varepsilon' \neq 0$ が確定したので超弱モデルは死に，小林–益川モデルの信頼性が高まったといえる．

3.3　CPLEAR の実験

CPT 保存則が成り立っていれば，CP の破れと T の破れは同一である．しかし，CPT 保存則もしくは T 保存則そのものの検証は独立に行わなければならない．CPT 保存則の成立いかんにかかわらず T の破れがあること(すなわち $A_\mathrm{T} \neq 0$)を最初に検証したのは CPLEAR グループである．式 (2.20) は始状態と終状態が，K^0 もしくは $\overline{\mathrm{K}^0}$ であることがわかっていることを前提として導かれている．実際に実験をする際には，始状態と終状態が本当に K^0 もしくは $\overline{\mathrm{K}^0}$ であることを示さなければならない．

CPLEAR グループは，CERN の LEAR (高強度の低エネルギー反陽子ビーム貯蔵リング) の反陽子を停止させ，陽子との消滅反応を利用して始状態を同定した．

$$\mathrm{p\overline{p}} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \mathrm{K^-\pi^+K^0} \\ \mathrm{K^+\pi^-\overline{K}^0} \end{cases} \tag{3.12}$$

すなわち，同時生成される荷電 K の符号を見ることにより，時刻 $t = 0$ における K^0 もしくは $\overline{\mathrm{K}}^0$ が同定できる．時刻 t での同定は，弱い相互作用による崩壊過程が $\Delta S/\Delta Q = 1$ の法則に従うことを使う．

クォークモデルで考えれば，K の中の $\mathrm{s(\overline{s})}$ クォークは，W を放出して $\mathrm{u(\overline{u})}$ に変われるが，$\mathrm{\overline{u}(u)}$ には変われない．すなわち，$\mathrm{K^0(\overline{K}^0)} \rightarrow \mathrm{e^+\pi^-\nu(e^-\pi^+\overline{\nu})}$ は可能であるが，$\mathrm{K^0(\overline{K}^0)} \rightarrow \mathrm{e^-\pi^+\overline{\nu}(e^+\pi^-\nu)}$ は起こらない．したがって，崩壊で放出される電子の符号を見ればよいが，この場合は，$<\mathrm{K}^0| \rightarrow < \mathrm{e^+\pi^-\overline{\nu}}|T|\mathrm{K}^0><\mathrm{K}^0|$ としなければならず，式 (2.18) は，次式のように変更される．

$$\begin{aligned} P(\overline{\mathrm{K}}^0 \rightarrow \mathrm{K}^0; t) &\rightarrow P(\overline{\mathrm{K}}^0 \rightarrow \mathrm{K}^0; t)\mathit{\Gamma}(\mathrm{K}^0 \rightarrow \mathrm{e^+\pi^-\nu}) \\ &= |A_{Kl\nu}(1-y)(1+2\varepsilon)f_-(t)|^2 \\ P(\mathrm{K}^0 \rightarrow \overline{\mathrm{K}}^0; t) &\rightarrow P(\mathrm{K}^0 \rightarrow \overline{\mathrm{K}}^0; t)\mathit{\Gamma}(\overline{\mathrm{K}}^0 \rightarrow \mathrm{e^-\pi^+\overline{\nu}}) \\ &= |A^*_{Kl\nu}(1+y^*)(1-2\varepsilon)f_-(t)|^2 \end{aligned} \tag{3.13}$$

ここで第 2 行の式を導くときに付録の式 (A.22) を使った．この結果，CPLEAR の観測量は ε，y の 1 次の近似で

$$\begin{aligned} A_{\mathrm{T}}(Kl_3) &= \frac{P(\overline{\mathrm{K}}^0 \rightarrow \mathrm{K}^0; t)\mathit{\Gamma}(\mathrm{K}^0 \rightarrow \mathrm{e^+\pi^-\nu}) - P(\mathrm{K}^0 \rightarrow \overline{\mathrm{K}}^0; t)\mathit{\Gamma}(\overline{\mathrm{K}}^0 \rightarrow \mathrm{e^-\pi^+\overline{\nu}})}{P(\overline{\mathrm{K}}^0 \rightarrow \mathrm{K}^0; t)\mathit{\Gamma}(\mathrm{K}^0 \rightarrow \mathrm{e^+\pi^-\nu}) + P(\mathrm{K}^0 \rightarrow \overline{\mathrm{K}}^0; t)\mathit{\Gamma}(\overline{\mathrm{K}}^0 \rightarrow \mathrm{e^-\pi^+\overline{\nu}})} \\ &\approx 4\Re\varepsilon - 2\Re y \end{aligned} \tag{3.14}$$

となる．したがって時間反転対称性の破れを CPT 保存 ($\delta = 0$) の仮定なしに立証するには，$\mathrm{K} \rightarrow \pi e\nu$ の崩壊振幅が CPT 保存であること ($\Re y = 0$) を別の実験で証明しておかなければならない．

CPLEAR グループ[15–17]は，$\mathrm{K}^0 \rightarrow \mathrm{e^+\pi^-\nu}$，$\overline{\mathrm{K}}^0 \rightarrow \mathrm{e^-\pi^+\overline{\nu}}$ (以上 $\Delta S/\Delta Q = 1$ 則を満たす反応) のみならず，$\overline{\mathrm{K}}^0 \rightarrow \mathrm{e^+\pi^-\nu}$，$\mathrm{K}^0 \rightarrow \mathrm{e^-\pi^+\overline{\nu}}$ などの $\Delta S/\Delta Q = 1$ 則を破る反応) の崩壊率のすべてを測定し，ユニタリー条件 (付録 A.4 参照) 等の

束縛条件を課した上で，パラメータ η_{+-}，η_{00}，A_{L} などのこれまでの実験値を取り入れて

$$A_{\mathrm{T}} = (6.6 \pm 1.6) \times 10^{-3}$$

$$\Re\varepsilon = (164.9 \pm 2.5) \times 10^{-5}$$

$$\Re(y + x_{-}) = (-0.2 \pm 0.3) \times 10^{-3} \tag{3.15}$$

$$\Im\delta = (2.4 \pm 5.0) \times 10^{-5} \tag{3.16}$$

を得た．x_{-} は式 (3.14) の導入では無視した $\Delta S/\Delta Q = -1$ 効果からの寄与で, 正確に A_{T} を計算すれば本来含まなければいけない量である．すなわち, $A_{\mathrm{T}} \neq 0$ を証明したわけで, CP 非保存でなく時間反転対称性の破れを直接見たと言える．T 非保存のパラメータ $\Re\varepsilon$ と $\mathrm{K_L}$ の崩壊非対称データ $A_{\mathrm{L}} = (3.27 \pm 0.12) \times 10^{-3}$ [10] から得られる $\Re\varepsilon_{\mathrm{L}} = \Re(\varepsilon + \delta)$ とが非常に近い値をもつが，これは CPT 保存がほぼ成立ししていること ($\delta \sim 0$) の結果である．

$\Im\delta$ もまた精度よく決められたので，式 (2.10) を使い，CPT の直接の破れを示す $|\Gamma_{11} - \Gamma_{22}|$ が，混合による破れ $|M_{11} - M_{22}|$ に比べて圧倒的に大きいことはないという仮定を入れれば，質量値における CPT の破れを評価できる．

$$\frac{M_{\mathrm{K^0}} - M_{\overline{\mathrm{K}^0}}}{M_{\mathrm{K}}} = \frac{M_{11} - M_{22}}{M_{\mathrm{K}}} \approx \frac{4\Delta m \Im\delta}{M_{\mathrm{K}}} \leq 1 \times 10^{-18} \tag{3.17}$$

CPT は非常によい精度で成り立っているといってよい．

4章 小林–益川行列

4.1 弱固有状態と質量固有状態

小林–益川行列(以下 KM 行列とも書く)の導入に関しては文献 I[2)]に詳しいので，そちらを参照していただくとして，ここでは本編の議論に必要な式を以下に掲げる．

弱い相互作用のうち，荷電ボソン $W^{\pm}$ を吸収放出する反応のハミルトニアン密度は，次のように表される．

$$\mathcal{H}_{\mathrm{W}} = \frac{g_{\mathrm{W}}}{\sqrt{2}}[(\overline{u}\gamma^{\mu}\tilde{d} + \overline{c}\gamma^{\mu}\tilde{s} + \overline{t}\gamma^{\mu}\tilde{b})W^{+}_{\mu} + \mathrm{h.c.}] \tag{4.1}$$

h.c. はエルミート共役を意味する．$\tilde{d}$，$\tilde{s}$，$\tilde{b}$ は，クォークが弱い相互作用をするときの固有状態で，質量固有状態 d，s，b とは，小林–益川行列 V_{KM} により結びついている．

$$\begin{pmatrix} \tilde{d} \\ \tilde{s} \\ \tilde{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{\mathrm{ud}} & V_{\mathrm{us}} & V_{\mathrm{ub}} \\ V_{\mathrm{cd}} & V_{\mathrm{cs}} & V_{\mathrm{cb}} \\ V_{\mathrm{td}} & V_{\mathrm{ts}} & V_{\mathrm{tb}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

標準理論では小林–益川行列の虚数部が CP の破れを引き起こす．

4.2 行列要素の数値評価

行列要素 V_{KM} の絶対値は各種の崩壊率の測定から評価が可能である．例えば，原子核のベータ崩壊は d クォークが u クォークと電子と反ニュートリノに壊れる反応であるので，$d \to u$ 遷移したがって小林–益川行列要素の $|V_{\mathrm{ud}}|$ が測定できる．同様にして他の要素も決められる．t クォークの関与する行列要素は直接測定が困難であるが，ユニタリティを使って他の行列要素から計算が可

能である．文献 I 以降加わった新しい情報は，中性 B メソンと $\overline{\mathrm{B}}$ メソンとの質量差 Δm_{d} を測定し，標準理論と比べることにより，$|V_{\mathrm{td}}|$ をユニタリティから計算するのでなく，実測できるようになったことである．まとめると

V_{KM} の絶対値を決める反応

$|V_{\mathrm{ud}}|$　原子核のベータ崩壊

$|V_{\mathrm{us}}|$　ストレンジ粒子のレプトン崩壊またはハイペロンのベータ崩壊

$|V_{\mathrm{cd}}|$　高エネルギーニュートリノによるチャーム粒子生成

$|V_{\mathrm{cs}}|$　チャームメソンのレプトン崩壊

$|V_{\mathrm{cb}}|$　B メソンのレプトン崩壊

$|V_{\mathrm{ub}}|$　B メソンのレプトン崩壊

$|V_{\mathrm{td}}|$　B_{d}^{0} メソンの混合

$|V_{\mathrm{ts}}|$　ユニタリティーを使って計算

$|V_{\mathrm{tb}}|$　ユニタリティーを使って計算

数値は[10)]

$$V_{\mathrm{KM}} = \begin{pmatrix} 0.9753 \pm 0.001 & 0.2205 \pm 0.004 & 0.0032 \pm 0.0013 \\ -0.2205 \pm 0.004 & 0.9745 \pm 0.0008 & 0.039 \pm 0.003 \\ 0.0085 \pm 0.008 & -0.039 \pm 0.003 & 0.9993 \pm 0.0002 \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

行列要素の位相は，クォーク場の位相を適当に選ぶことによりいろいろな表示が可能であるが，データの解析には次のウォルフェンシュタイン表示を使うのが便利である．

$$V_{\mathrm{KM}} = \begin{pmatrix} 1-\lambda^2/2 & \lambda & A\lambda^3(\rho - i\eta) \\ -\lambda & 1-\lambda^2/2 & A\lambda^2 \\ A\lambda^3(1-\rho-i\eta) & -A\lambda^2 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

このとき，CP の破れは，V_{ub} もしくは V_{td} の虚数部として現れる．標準理論における CP 非保存の検証は，小林–益川行列のユニタリー性とその虚数部を決めることに尽きる．ユニタリーでないときは，第 4 世代のクォークの存在もしくは標準理論の拡張が必要となる．実験値を入れると

$$\lambda = 0.2205 \pm 0.0018, \quad A = 0.80 \pm 0.04, \quad \sqrt{\rho^2 + \eta^2} = 0.36 \pm 0.09 \tag{4.5}$$

が得られる．

4.3　ユニタリー三角形

ユニタリー条件により

$$V_{ub}^* V_{ud} + V_{cb}^* V_{cd} + V_{tb}^* V_{td} = 0 \tag{4.6}$$

が成立する．複素平面でこれを図示すると，図 4.1(a) のようになり，さらにウォルフェンシュタインパラメータで表せば，底辺の長さが 1，頂点 の位置が (ρ, η) で表される三角形となる．三角形の各頂角は†

$$\phi_1 = \arg\left(-\frac{V_{cd}V_{cb}^*}{V_{td}V_{tb}^*}\right) \approx \arg(-V_{td}) \tag{4.7}$$

$$\phi_2 = \arg\left(-\frac{V_{td}V_{tb}^*}{V_{ud}V_{ub}^*}\right) \approx \arg\left(-\frac{V_{td}}{V_{ub}^*}\right) \tag{4.8}$$

$$\phi_3 = \arg\left(-\frac{V_{ud}V_{ub}^*}{V_{cd}V_{cb}^*}\right) \approx \arg(-V_{ub}^*) \tag{4.9}$$

によって小林–益川行列要素と結びついている．

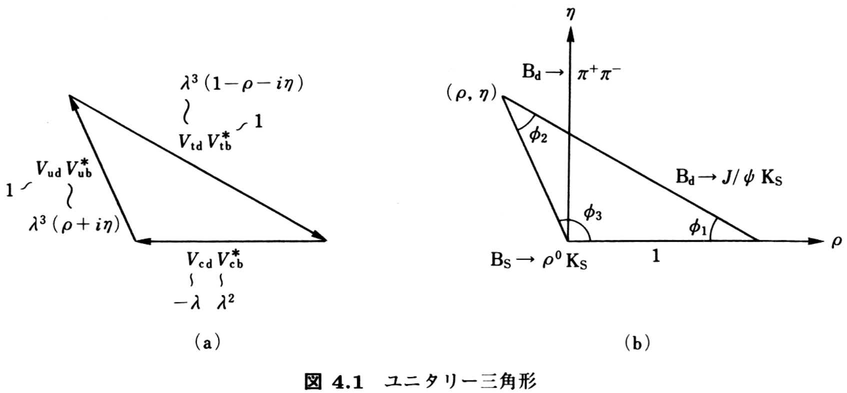


図 4.1　ユニタリー三角形

(a) 小林–益川行列のユニタリー条件は複素平面の閉三角形として表すことができる．
(b) ウォルフェンシュタインのパラメータ化を施せば，底辺の長さが 1，頂点が (ρ, η) の三角形となる．頂角 ϕ_1，ϕ_2，ϕ_3 は本文の式 (4.7) ～ (4.9) で与えられていて，付記した反応を測定して決められる．

---

† $\alpha = \phi_2$，$\beta = \phi_1$，$\gamma = \phi_3$ という変数もよく使われる．

5章 Bメソン崩壊とCPの破れ

5.1 B の混合

第 2 章で導いた式はそのまま B メソンに適用できるので，B の 2 体問題も K と同様に扱える．ただし，b クォークとペアを組む相手のクォークが d もしくは s の二通りの選択が可能であり，それぞれ B_d，B_s と名づける．B 反応の実験は現時点では CPT 非保存が検証できるほどの精度はないので，以下は CPT 保存を仮定する．また K と違って質量が ∼ 5 GeV と大きく崩壊チャネルがたくさん開いているので，B^0 と $\overline{B}^0$ との崩壊幅の差 $\Delta\Gamma$ は Γ に比べて小さく無視してよい．また，B の場合は，短寿命の B_S†(と長寿命の B_L)に対する CP 固有状態の B_1（と B_2)との対応関係は不明であるので，K と同じく S，L で固有状態を表して K の場合に対応する式を

$$
\begin{aligned}
|B_S> &= p|B^0> + q|\overline{B}^0> \\
|B_L> &= p|B^0> - q|\overline{B}^0>
\end{aligned}
\tag{5.1}
$$

と書こう．この p と q は，K の場合の p と q とは異なるが特に混乱の恐れのないときは，このまま同じ記号を使うことにする．

B^0 と $\overline{B}^0$ の時間変化は，式 (2.15) と同じように書けて

$$
\begin{aligned}
|B^0(t)> &= \frac{1}{2p}[|B_S> e^{-i\lambda_S t} + |B_L> e^{-i\lambda_L t}] \\
&= f_+(t)|B^0> + \frac{q}{p} f_-(t)|\overline{B}^0> \\
|\overline{B}^0(t)> &= \frac{1}{2q}[|B_S> e^{-i\lambda_S t} - |B_L> e^{-i\lambda_L t}]
\end{aligned}
$$

† b クォークと反 s クォークの作る B_S と混同しないようにする．B_d，B_s それぞれに短寿命と長寿命状態が存在する．

$$= \frac{p}{q} f_-(t)|\mathrm{B}^0> + f_+(t)|\overline{\mathrm{B}}^0> \tag{5.2}$$

$f_\pm$ は，式 (2.16) と同じ式である．これより混合の時間変化は，$\Gamma = (\Gamma_\mathrm{S} + \Gamma_\mathrm{L})/2$, $\Delta\Gamma = \Gamma_\mathrm{S} - \Gamma_\mathrm{L} = 0$ とおいて

$$P(\mathrm{B}^0 \to \mathrm{B}^0; t) = P(\overline{\mathrm{B}}^0 \to \overline{\mathrm{B}}^0; t) = |f_+(t)|^2 = \frac{\mathrm{e}^{-\Gamma t}}{2}(1 + \cos\Delta m t) \tag{5.3}$$

$$P(\mathrm{B}^0 \to \overline{\mathrm{B}}^0; t) = \left|\frac{q}{p}\right|^2 |f_-(t)|^2 = \left|\frac{q}{p}\right|^2 \frac{\mathrm{e}^{-\Gamma t}}{2}(1 - \cos\Delta m t) \tag{5.4}$$

$$P(\overline{\mathrm{B}}^0 \to \mathrm{B}^0; t) = \left|\frac{p}{q}\right|^2 |f_-(t)|^2 = \left|\frac{p}{q}\right|^2 \frac{\mathrm{e}^{-\Gamma t}}{2}(1 - \cos\Delta m t) \tag{5.5}$$

B^0 と $\overline{\mathrm{B}}^0$ は，K メソンの場合と同じように崩壊先のレプトンもしくは K メソンの符号 ($\mathrm{K}^+ = \bar{\mathrm{s}}\mathrm{u}, \mathrm{K}^- = \mathrm{s}\bar{\mathrm{u}}$) を見ることにより識別できる．

$$\begin{gathered} \mathrm{b} \longrightarrow \mathrm{c} + \mathrm{W}^-, \quad \overline{\mathrm{b}} \longrightarrow \bar{\mathrm{c}} + \mathrm{W}^+ \\ \mathrm{W}^\mp \longrightarrow l^\mp, \quad \mathrm{c}(\bar{\mathrm{c}}) \longrightarrow \mathrm{s}(\bar{\mathrm{s}}) \end{gathered} \tag{5.6}$$

混合率は，例えば $\mathrm{B}^0\overline{\mathrm{B}}^0$ 対の生成反応で，混合があれば同符号のレプトン対が，混合がないときは異符号レプトン対が生成されるので，比をとることにより測定できる．$\mathrm{B} \leftrightarrow \overline{\mathrm{B}}$ の時間発展の非対称を見ることにより，混合における CP のパラメータ $\Re\varepsilon_\mathrm{B}$ を取り出すことは原理的に可能であるが，現時点では実験が困難であり，後述する直接の破れを検出する方がより有望である．

ここで，$x = \Delta m/\Gamma$ によって混合パラメータ x を定義する．x には x_d と x_s の 2 種類がある．B の崩壊寿命は $\approx 10^{-12}$ 秒と短いので崩壊曲線の測定が困難であり，歴史的には時間的に積分した非対称を測定して[18,19]，x_d の最初の値が得られたが，現在では半導体検出器が発達しており崩壊時間依存性が測定可能である．図 5.1 はその一例を示す[20]．$\mathrm{B_s}$ は混合率が大きく振動が激しいので，x_s については今のところ下限値のみがわかっている[21]．値は

$$\begin{aligned} \Delta m_{\mathrm{B_d}} &= 0.464 \pm 0.018 \times 10^{12} \hbar\,\mathrm{sec}^{-1} \\ \Delta m_{\mathrm{B_s}} &> 14.3 \times 10^{12} \hbar\,\mathrm{sec}^{-1} \\ \Gamma_{\mathrm{B_s}}/\hbar &\approx \Gamma_{\mathrm{B_d}}/\hbar = \tau_{\mathrm{B_d}}^{-1} = (1.56 \pm 0.04 \times 10^{-12}\,\mathrm{sec})^{-1} \\ x_d &= \Delta m_{\mathrm{B_d}}/\Gamma_{\mathrm{B_d}} = 0.723 \pm 0.032 \end{aligned}$$

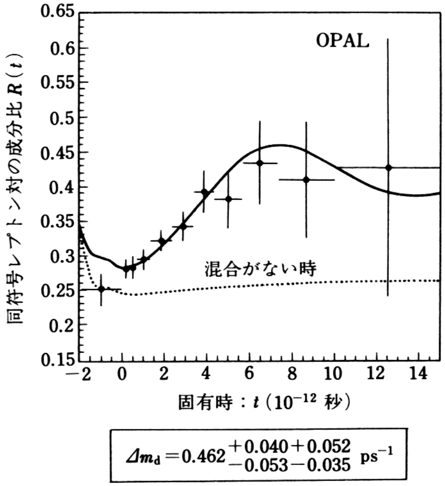


図 5.1　混合パラメータ $x_{\rm d}$ の測定[20)]

$e^-e^+ \to B_d^0\overline{B}_d^0 + X$ 反応で，同符号レプトン対と異符号レプトン対の生成比を崩壊時間の関数としてプロットし，時間依存性 ($\sim \cos \Delta m_{B_d} t$) から $x_{\rm d}$ が決められる．

5.2　B 崩壊における非対称

混合と崩壊の干渉による CP の破れ　　K 崩壊の場合の CP の直接の破れは小さいが，標準理論によれば B メソン崩壊では大きくなる可能性がある．ここで，三田ら[22)]の提案に従って，B^0 と $\overline{B}^0$ がともに共通の CP 固有状態 f に崩壊する過程を考えよう．B^0 が直接 f に崩壊する過程と $\overline{B}^0$ を通して f に崩壊する過程の干渉が起きるので，弱い相互作用振幅の位相が取り出せる．$\delta\Gamma \neq 0$ の条件式 (3.3) に必要な散乱位相の役割を質量による時間振動が肩代わりするのである．これを「混合と崩壊の干渉による CP の破れ」と呼ぶこともある．

崩壊振幅とパラメータ β を次式で定義すれば

$$< f|T|B^0 > = |A|e^{i\phi_W}e^{i\delta_f}, \qquad < \overline{f}|T|\overline{B}^0 >= |A|e^{-i\phi_W}e^{i\delta_f} \quad (5.7)$$

$$\beta = \frac{q}{p}\frac{< f|T|\overline{B}^0 >}{< f|T|B^0 >} = \eta_f \frac{q}{p}\frac{< \overline{f}|T|\overline{B}^0 >}{< f|T|B^0 >} \quad (5.8)$$

η_f は f の CP パリティで，δ_f は終状態の散乱位相である．$B^0\overline{B}^0$ 混合を引き起こす行列要素 $\tilde{\mathcal{M}}_{21}$ は，標準理論では図 5.2 の箱型図で与えられる．この箱型図

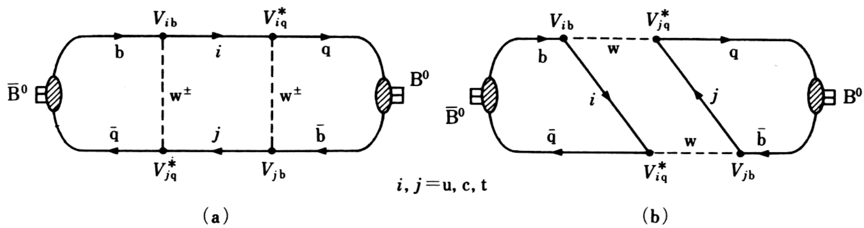


図 5.2　B^0 と $\overline{B}^0$ 混合を引き起こす箱型図．中間状態はトップクォークの寄与が優勢である．

の寄与は，中間状態 i の質量の自乗 $(m_i/m_W)^2$ と $V_{\rm KM}$ の積に比例するので，虚数部は小林–益川行列要素の虚数部に直接比例する．したがって優勢な箱型図は，KM 行列要素による抑圧因子が働かなければ中間状態がトップクォークであり，B メソンの場合はまさにそうなっている．このとき $\tilde{\mathcal{M}}_{21} \propto (V_{\rm tb}V_{\rm tq}^*)^2$，$\tilde{\mathcal{M}}_{12} \propto (V_{\rm tb}^*V_{\rm tq})^2$，$\rm q = d, s$ が成り立つので，式 (2.13)，(2.14) を参照すれば

$$\Delta m_{\rm B_q} = 2\Re\sqrt{\tilde{\mathcal{M}}_{12}\tilde{\mathcal{M}}_{21}} \approx 2|\tilde{\mathcal{M}}_{12}| \propto |V_{\rm tb}V_{\rm tq}^*|^2 \tag{5.9}$$

$$\frac{q}{p} = \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} = \sqrt{\frac{\tilde{\mathcal{M}}_{12}^*}{\tilde{\mathcal{M}}_{12}}} \simeq \frac{V_{\rm tb}V_{\rm tq}^*}{V_{\rm tb}^*V_{\rm tq}}$$

$$\equiv \mathrm{e}^{-2i\phi_{\rm M}} = \begin{cases} V_{\rm td}^*/V_{\rm td} & \mathrm{B_d}\ \text{の場合} \\ 1 & \mathrm{B_s}\ \text{の場合} \end{cases} \tag{5.10}$$

であるから，q/p はほぼ純粋な位相に近い．このとき

$$\beta = \eta_f \mathrm{e}^{-2i(\phi_{\rm M}+\phi_{\rm W})} \equiv \eta_f \mathrm{e}^{-2i\phi} \tag{5.11}$$

と書けるので，β もまた純粋な位相とみなしてよい．これらの関係式を入れると，崩壊振幅の時間依存性は

$$A(\mathrm{B}^0 \to f;t) = < f|T|\mathrm{B}^0 > \{f_+(t) + \beta f_-(t)\}$$

$$A(\overline{\mathrm{B}}^0 \to f;t) = \frac{p}{q} < f|T|\mathrm{B}^0 > \{f_-(t) + \beta f_+(t)\} \tag{5.12}$$

$|p/q| \approx 1$，$|\beta| \approx 1$ を入れれば，崩壊率は

$$\Gamma(\mathrm{B}^0 \to f;t) \propto |< f|T|\mathrm{B}^0 >|^2\{|f_+|^2 + |\beta f_-|^2 + 2\Re(f_+\beta^* f_-^*)\}$$

$$\simeq |< f|T|B^0 >|^2 \mathrm{e}^{-\Gamma t}\{1 - \eta_f \sin 2\phi \sin \Delta m t\}$$

$$\Gamma(\overline{\mathrm{B}}^0 \to f;t) \propto \left|\frac{p}{q} < f|T|\mathrm{B}^0 >\right|^2 \{|f_-|^2 + |\beta f_+|^2 + 2\Re(f_+^* \beta^* f_-)\}$$

$$\simeq |< f|T|\mathrm{B}^0 >|^2 \mathrm{e}^{-\Gamma t}\{1 + \eta_f \sin 2\phi \sin \Delta m t\} \qquad (5.13)$$

したがって B 崩壊率の非対称は

$$A_f = \frac{\Gamma(\overline{\mathrm{B}}^0 \to f;t) - \Gamma(\mathrm{B}^0 \to f;t)}{\Gamma(\overline{\mathrm{B}}^0 \to f;t) + \Gamma(\mathrm{B}^0 \to f;t)} = \eta_f \sin 2\phi \sin \Delta m t \qquad (5.14)$$

と求められる．

上の式は始状態が B^0 もしくは $\overline{\mathrm{B}}^0$ とわかっているときの式である．現時点では純粋な $\mathrm{B}^0(\overline{\mathrm{B}}^0)$ ビームを作ることは難しく，実際には $\mathrm{B}^0\overline{\mathrm{B}}^0$ の対を発生させ，一方を崩壊先のレプトンもしくは K の電荷の正負で B^0 もしくは $\overline{\mathrm{B}}^0$ と知った上で他方の崩壊モードを測定する．双方の崩壊点間距離すなわち時間差 $(\Delta t \equiv t_1 - t_2)$ をはかり，和 $t_1 + t_2$ については積分してしまうのである．B ファクトリーと呼ばれる加速器は，重心系エネルギーが $\sim 10\,\mathrm{GeV}$ の $\mathrm{e}^-\mathrm{e}^+$ 非対称衝突型加速器で，$\Upsilon(4S)$($\mathrm{B}^0\overline{\mathrm{B}}^0$ の $J^{\mathrm{PC}} = 1^{--}$ の共鳴状態) を通して $\mathrm{B}^0\overline{\mathrm{B}}^0$ 対生成をおこなう．この場合のように，$\mathrm{B}^0\overline{\mathrm{B}}^0$ 対が，CP が正で軌道角運動量が奇数の状態にあるときは，$t \to \Delta t$ とするだけで式 (5.14) がそのまま適用できることが知られている．

6章 ユニタリー三角形の頂角測定

中性Bメソンの混合と崩壊の干渉により調べられる物理量は，β の位相でありそれは質量行列効果である混合パラメータ q/p の位相と崩壊振幅の位相の和である．q/p は式 (5.10) で与えらているので，種々のB崩壊を観測することにより，ユニタリー三角形のすべての頂角が決められる．2 ～ 3 の例を下に掲げる．

$\mathbf{B_d^0 \to J/\psi K_S}$　まず代表的な例として，$\mathrm{B_d^0} \to J/\psi\mathrm{K_S}$ 反応を考える．この反応に寄与する優勢なファインマン図を図 6.1(a) に示す．弱い相互作用により第 1 近似（トリー図）における V_{KM} は，$\mathrm{b} \to \mathrm{c}$ と $\mathrm{W} \to \mathrm{s\bar{c}}$ 遷移に現れるが，これは実数なので $\phi_{\mathrm{W}} = 0$ である．したがってこの反応の非対称から得られる情報は，q/p の位相 $2\arg(-V_{\mathrm{td}}) = 2\phi_1$ である．

$\mathbf{B_d^0 \to \pi\pi}$　この過程のファインマン図を図 6.1(c) に示す．この図は $\mathrm{b} \to \mathrm{u}$，$\mathrm{\bar{d}} \to \mathrm{\bar{u}}$ 遷移を含むので，ここからの位相への寄与は $\arg(-V_{\mathrm{ub}}V_{\mathrm{ud}}^*)$ となり，q/p の位相を加えて ϕ_2 が測れる．同様に $\mathrm{B_s} \to \rho^0\mathrm{K_S}$ などの反応から ϕ_3 も測れる．

ペンギン図　ここで留意しなければならないのはペンギン図である．ペンギン図はループを含むので高次の寄与であるが，Bメソンの場合はトリー図の寄与そのものが小林–益川行列要素により小さいので，ペンギン図の寄与がしばしば無視できない．トリー図崩壊振幅の大きさを A_{T}，位相を ϕ_{T}，ペンギン図崩壊振幅の大きさを A_{P}，位相を ϕ_{P} とすると，非対称 A_f は

$$\sim \frac{A_{\mathrm{P}}}{A_{\mathrm{T}}} \sin(\phi_{\mathrm{T}} - \phi_{\mathrm{P}}) \tag{6.1}$$

程度の変更を受ける．$\mathrm{B} \to J/\psi\mathrm{K_S}$ のペンギン図を図 6.1(b) に，$\mathrm{B} \to \pi\pi$ のペンギン図を図 6.1(d) に掲げる．

$\mathrm{B} \to J/\psi\mathrm{K_S}$ におけるペンギン図で優勢な t 中間状態からの寄与は $\sim (V_{\mathrm{tb}}V_{\mathrm{ts}}^*)$

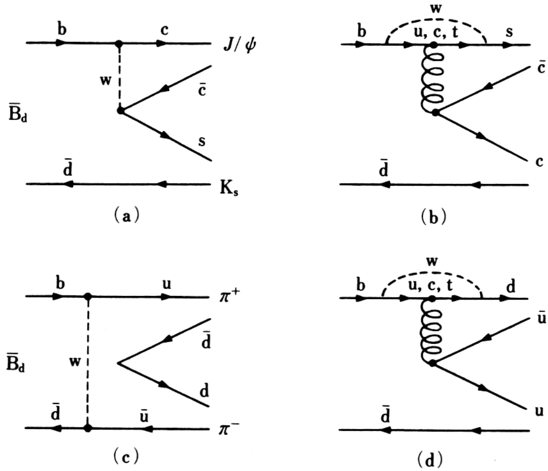


図 6.1　B $\to J/\psi \mathrm{K_S}$ 崩壊に寄与するトリー図 (a) とペンギン図 (b)．ユニタリー三角形の $\phi_1 = \arg(-V_{\mathrm{td}})$ が測れる．
B $\to \pi\pi$ 崩壊に寄与するトリー図 (c) とペンギン図 (d)．ユニタリー三角形の $\phi_2 = \arg(-V_{\mathrm{td}} V_{\mathrm{ub}})$ が測れる．

となるが，この位相はゼロであるので，トリー図の位相と同じであり影響は小さい．したがって B $\to J/\psi \mathrm{K_S}$ 反応で最もクリーンな測定ができるとされ，種々の反応の中でも「黄金事象」といわれている．これに反して，B $\to \pi\pi$ 反応ペンギン図の位相は $\sim \arg(V_{\mathrm{tb}} V_{\mathrm{td}}^*)$ であるが，これはトリー図の位相 $\arg(V_{\mathrm{ub}} V_{\mathrm{ud}}^*)$ とは異なるので大きな影響を受ける．しかし，この場合でも $\mathrm{B}^{\pm} \to \pi^{\pm}\pi^0$ や $\mathrm{B}^0(\overline{\mathrm{B}}^0) \to \pi^+\pi^-, \pi^0\pi^0$ 等の各種終状態を測ってアイソスピン解析によりペンギン図を分離することができるとされている．

B メソン崩壊の非対称測定データ　　標準理論は，B 崩壊の非対称が大きくでることを予想する．これまでのところ，CERN の LEP/OPAL グループ[23)]とフェルミラボの TEVATRON/CDF グループ[24)]とが

$$\sin 2\phi_1 = 3.2 \pm \begin{cases} +1.8 \\ -2.0 \end{cases} \pm 0.5 : \mathrm{OPAL}$$

$$\sin 2\phi_1 = 0.70 \pm \begin{cases} +0.14 \\ -0.44 \end{cases} \quad : \mathrm{CDF} \qquad (6.2)$$

という標準理論と矛盾しない値を出しているが，精度はいま一歩というところで，B ファクトリーからのデータが待たれる．B ファクトリーは日本の高エネルギー加速器研究機構と米国のスタンフォード線型加速器センターの 2 個所で稼働中であり，それぞれ BELLE および BABAR グループがデータを取得中である．

7章 ユニタリー三角形の決定

これまでに得られたデータを使ってユニタリー三角形がどこまで調べられているかを評価してみよう．まず，ε_0，ε' が標準理論でどう表現されるかを見て，次にBセクターの観測量を議論する．

7.1 Kセクターからの情報

パラメータ ε_0 の評価　標準理論での $K^0\overline{K}^0$ 混合は図7.1の箱型図で与えられる．この箱型図の寄与の大きさは，中間状態 i の質量の自乗 $(m_i/m_W)^2$ に比例するので，小林–益川行列要素による抑止がなければトップクォークの中間状態が優勢となるはずであるが，Kメソンの場合のcc，ct，ttクォークの中間状態のKM行列要素は，それぞれ

$$
\begin{aligned}
(V_{\rm cs}V_{\rm cd}^*)^2 &\sim \lambda^2 \\
V_{\rm cs}V_{\rm cd}^*V_{\rm ts}V_{\rm td}^* &\sim A^2\lambda^6(1-\rho-i\eta) \\
(V_{\rm ts}V_{\rm td}^*)^2 &\sim A^4\lambda^{10}(1-\rho-i\eta)^2
\end{aligned}
\tag{7.1}
$$

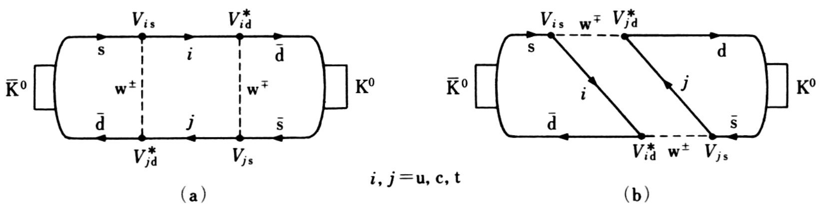


図 7.1　K^0 と $\overline{K}^0$ 混合を引き起こす箱型図

実数部が Δm を与え，虚数部(小林–益川行列要素 $V_{is}V_{jd}^*$，i または $j=t$)が ε に寄与する．

に比例するのでcクォークの寄与の方が大きくなる．しかしcクォークの寄与は実数であるのでCPの破れには寄与しない．虚数部はトップクォークの寄与から来るので

$$\Re M_{12} \gg \Im M_{12}, \quad \Re\Gamma_{12} \gg \Im\Gamma_{12} \tag{7.2}$$

が成立する．このことは式(2.13)を参照すれば，$\Delta m \approx 2\Re M_{12}$ を意味するから

$$|\varepsilon_0| \approx \Im M_{12}/\Re M_{12} \sim \frac{A^2\lambda^6\eta}{\lambda^2} \sim \lambda^4\eta \sim 10^{-3} \tag{7.3}$$

となり，定性的に実験値をほぼ再現している．より詳しい計算によれば[25,26]

$$\varepsilon_0 \approx 1.69\times 10^{-2}A^4\eta(1-\rho)\left(\frac{m_{\rm t}}{175{\rm GeV}}\right)^2 \tag{7.4}$$

となる．これは $\rho-\eta$ 平面で一つの双曲線を与える．

ε' の評価とペンギン図　崩壊振幅は箱型図を中間で切断して得られる（図7.2(a)(b)）．これはループを含まないトリー図である．ただし，崩壊振幅は質量殻上 (on shell) にありエネルギーを保存するので，トップ中間状態の箱型図の切断に対応する寄与はない．したがって崩壊振幅にトップクォーク状態を含めるには，図7.2(c)のペンギン図を考慮しなければならない．Kの場合はトリー図の寄与が大きいので，CPの直接の破れを表すパラメータ ε' は相対的に小さくなる．この図は $\Delta I=1/2$ 遷移であるので，振幅 A_0 に寄与し A_2 への寄与はない．トリー図とペンギン図の振幅の大きさを $A_{\rm T}$，$A_{\rm P}$ とすると

$$\frac{\Im A_0}{\Re A_0} \sim \frac{\Im(V_{\rm ts}V_{\rm td}^*)}{\Re(V_{\rm us}V_{\rm ud}^*)}\frac{A_{\rm P}}{A_{\rm T}} \sim \frac{A^2\lambda^5\eta}{\lambda}\frac{A_{\rm P}}{A_{\rm T}} \sim 10^{-3}\frac{A_{\rm P}}{A_{\rm T}} \tag{7.5}$$

ペンギン図はQCD部分を含むので評価が難しいが，$|A_{\rm P}/A_{\rm T}| \le O(1)$ と見積もられている．ε' を見積もるには付録の式(A.17)で $\Im A_2 = 0$ とし第2項を無視すると

$$|\varepsilon'/\varepsilon_0| = \left|\frac{\omega}{\varepsilon_0}\right|\frac{\Im A_0}{\Re A_0} \sim 10^{-2} \tag{7.6}$$

となり，実験値よりやや大きい．ただし，ペンギン図にはグルーオンを交換するQCDペンギン図($\Im A_0$ に寄与)のほかにフォトンを交換する電弱ペンギン図($\Im A_2$ に寄与)もあり逆符号で効くので，実際にはこれより小さくなる．詳しい

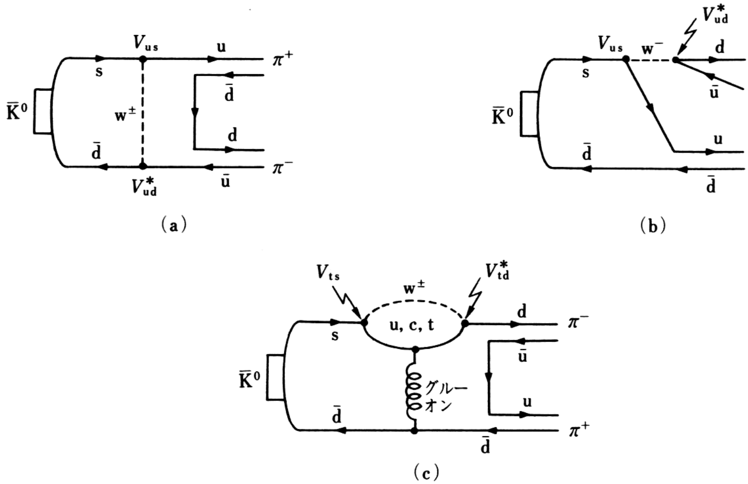


図 7.2 $K^0 \to 2\pi$ 崩壊のトリー図 (a)(b) とペンギン図 (c)．トリー図は t クォークへ遷移する小林–益川行列要素を含まず実数となる．CP の破れ ε' は，ペンギン図の V_{td} の虚数部が寄与する．

計算によれば[27,28]

$$\Re\left(\frac{\varepsilon'}{\varepsilon_0}\right) = [-1.4 + 8.2 R_S B_6^{(1/2)} - 4.0 R_S B_8^{(3/2)}] A^2 \lambda^5 \eta$$
$$\approx (0.81 \pm 0.27) \times 10^{-2} A^2 \eta \qquad (7.7)$$
$$R_S = \left[\frac{158\text{MeV}}{m_s + m_d}\right]^2, \quad B_6^{(1/2)}, B_8^{(3/2)} \approx O(1)$$

となる．

7.2 B セクターからの情報

B メソンのレプトン崩壊と混合パラメータ　次に B メソンのレプトン崩壊を測定して得られる $|V_{ub}/V_{cb}|$ は，$\rho - \eta$ 平面で一つの円を与える．

$$\sqrt{\rho^2 + \eta^2} = 0.36 \pm 0.04 \qquad (7.8)$$

次に混合パラメータ $x_d = \Delta m_{B_d}/\Gamma_B$ であるが，式 (5.9) により

$$\Delta m_{B_d} \propto |V^*_{tb} V_{td}|^2 \sim (1 - \rho)^2 + \eta^2$$

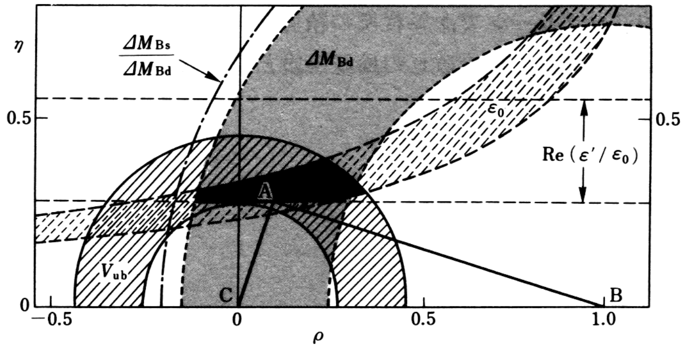


図 7.3　ユニタリー三角形データ
種々の実験データから再現したユニタリティー三角形の許容範囲.

$$\frac{\Delta m_{\mathrm{B_s}}}{\Delta m_{\mathrm{B_d}}} \sim \left|\frac{V_{\mathrm{ts}}}{V_{\mathrm{td}}}\right|^2 \sim \frac{1}{\lambda^2\{(1-\rho)^2+\eta^2\}} \tag{7.9}$$

が成立するので，データと比較することにより別の円を与えることができる.

$$A\sqrt{((1-\rho)^2+\eta^2} = 1.65 \pm 0.45 \tag{7.10}$$

ユニタリー三角形を描く　　これらの実験データから得られる制限を図 7.3 に示した．今のところ，すべてのデータは小林–益川行列の与える標準理論と整合しているといえる．B 崩壊の非対称を測定し，すでに得られた角度と整合すればそれは小林–益川モデルに対する強い支持証拠となる．また整合しなければユニタリティーは成立していないことを意味する．その場合，小林–益川行列を 4×4 に拡張するとか，他の CP 非保存のメカニズムを考えるなどの標準理論の何らかの修正が必要となる．

最後に進行中の $\mathrm{K}^+ \to \pi^+\nu\overline{\nu}$ と計画中の $\mathrm{K_L} \to \pi^0\nu\overline{\nu}$ の測定が行われれば，理論計算式[29]

$$\frac{\Gamma(\mathrm{K}^+ \to \pi^+\nu\overline{\nu})}{\Gamma(\mathrm{K}^+ \to all)} \simeq 1.0\times10^{-10}A^4[(\rho-\rho_0)^2+\eta^2], \quad \rho_0 \simeq 1.4 \tag{7.11}$$

$$\frac{\Gamma(\mathrm{K_L} \to \pi^0\nu\overline{\nu})}{\Gamma(\mathrm{K}^+ \to all)} \simeq 0.41\times10^{-9}A^4\eta^2 \tag{7.12}$$

によって標準理論の独立な検証を与えることを言い添えておこう．特に後者の

反応は理論的にはクリーンで１％程度の精度があるとされ，単独の実験としては最も厳密で直接的な CP の破れの検証手段と目される．

8章 終わりに

CP の破れの発見以来すでに 35 年が経過した．破れの現れる反応数が限られることと実験の困難さから，CP の破れを理解したといえる段階にはまだ到達していないが，標準理論に組み込まれた小林–益川モデルが有力な理論として浮上してきている．B の実験は緒に着いたばかりであるので，データが出そろい標準理論の検証が行えるまでにはもう数年の年月を必要とする．そしてそのときはこの解説の続編が必要となろう．

しかし，第 1 章「CP の効用」で述べたように，宇宙のバリオン生成には CP 非保存が必要とされている．小林–益川モデルは電弱相互作用相転移時に CP の破れが発生する理論であるから，仮に小林–益川モデルが正しいとわかっても，もしバリオン数非対称が大統一時に生成されたとするならば，小林–益川理論は CP の破れの一部は説明できても，大統一時に必要な CP の破れは別に探さなければならないことになる．

ただし，せっかく作られたバリオン数非対称が，インスタントン効果により電弱相互作用の相転移時に失われる可能性，もしくはその時期にバリオン数非対称が生じる可能性のあることもまた議論されている．この場合でもバリオン数とレプトン数の差(B − L)は保持されているので，バリオン非対称が B − L を破る大統一モデル，例えば SO(10) で生成されたとすれば，電弱相互作用の相転移を経てもバリオン数非対称は生き残る．今のところ，バリオン数非対称生成がいつ行われたかは未解決である．CP は奥深い．CP への巡礼が止むことは無いであろう．

付　録：T，CP，CPT

A.1　T，CP，CPT 対称演算の変換式

H をハミルトニアン，A，B を任意の固有状態とすると，一般に CPT が保存すれば，CPT 変換演算子を Θ と書くと

$$< B|H|A >=< \Theta A|H|\Theta B >=< \Theta B|H|\Theta A >^* \tag{A.1}$$

T が保存すれば

$$< B|H|A >=< TA|H|TB >=< TB|H|TA >^* \tag{A.2}$$

CP が保存すれば

$$< B|H|A >=< CPB|H|CPA > \tag{A.3}$$

が成立する．ここに，TA は，A の時間反転状態で，A から運動量とスピン成分を反転して得られる．CPA は A の CP 反転状態で，A を反粒子にし，運動量を反転して得られる．ΘA は，A の CPT 反転状態である．

A.2　崩壊振幅

崩壊振幅の中の T，CP，CPT 非保存部分を分離するために，散乱行列 S を強い相互作用部分 S_0 と崩壊を引き起こす弱い相互作用部分 $S_{\rm W}$ に分ける．$|A >$ を強い相互作用の安定な固有状態とし，$|B >$ をそれ以外の状態とすれば，$< A|S_0|B >= 0$ が成立する．$S_0, S_{\rm W}$ ともにユニタリーであるから

$$S_0^\dagger S_{\rm W} + S_{\rm W}^\dagger S_0 + 1 = 0 \tag{A.4}$$

が成立し．これを A と B で挟めば

$$< A|S_0^\dagger|A >< A|S_{\rm W}|B > + < A|S_{\rm W}^\dagger|B >< B|S_0|B >$$
$$=< A|S|B > + < A|S^\dagger|B >< B|S_0|B >= 0 \qquad (A.5)$$

もし，$|B >$ が S_0 の散乱固有状態であれば，$S_0|B >= {\rm e}^{i2\delta}|B >$ であるから

$$S_{AB} = \delta_{AB} - i2\pi\delta(E_A - E_B)T_{AB} \qquad (A.6)$$

を使えば

$$< A|T|B >= {\rm e}^{i2\delta} < A|T^\dagger|B >= {\rm e}^{i2\delta} < B|T|A >^* \qquad (A.7)$$

すなわち，崩壊先が強い相互作用の散乱固有状態であれば，終状態相互作用によって，崩壊振幅の位相が変わることを示す．

崩壊過程で CPT が保存すれば

$$< \Theta B|T|\Theta A >= {\rm e}^{2i\delta} < B|T|A >^* \qquad (A.8)$$

T が保存すれば

$$< TB|T|TA >= {\rm e}^{2i\delta} < B|T|A >^* \qquad (A.9)$$

CP が保存すれば

$$< CPB|T|CPA >= {\rm e}^{2i\delta} < B|T|A > \qquad (A.10)$$

が成立する．そこで崩壊振幅を

$$< B|T|A > = A(1+Y){\rm e}^{i\delta}$$
$$< \Theta B|T|\Theta A > = \overline{A}(1+\overline{Y}){\rm e}^{i\delta} \qquad (A.11)$$

と書けば，CPT 保存は $\overline{A}(1+\overline{Y}) = A^*(1+Y)^*$ を要求するから，$\overline{A} = A^*, \overline{Y} = -Y^*$ とおけば，A は CPT 保存項を，Y は CPT 非保存の割合を表す．さらに $A = \Re A + i\Im A$ と分解すると，式 (A.9) によって $\Im A$ は T 非保存かつ CP 非保存項を表す．

A.3　崩壊パラメータ ε_0，ε' と $A_{\rm L}$

K → 2π 崩壊　　K の 2π 崩壊は，CP 保存則が破れる過程として実験的に

最も詳しく調べられている過程である．CP の破れを表すパラメータとして K の CP 固有状態が混合する割合を示す ε_{S} と ε_{L} を定義した．通常，混合による CP の破れを間接的破れ，CP の違う固有状態に直接崩壊する過程を CP の直接の破れという．ここでは，K → 2π 崩壊における CP の破れの表式を書く．

まず，2π 状態を散乱の固有状態であるアイソスピン固有状態に分解する．π のアイソスピンは 1 であるから，2π 系のアイソスピンは 0, 1, 2 が可能であるが，K 崩壊からの 2π はスピンが 0 のみ許されるから，ボーズ対称性からアイソスピン 1 の状態は禁止される．したがって 2π 荷電状態をアイソスピンで書き直すと

$$
\begin{aligned}
|+- > &= \sqrt{\frac{2}{3}}|I=0> + \sqrt{\frac{1}{3}}|I=2> \\
|00> &= \sqrt{\frac{1}{3}}|I=0> - \sqrt{\frac{2}{3}}|I=2>
\end{aligned}
\tag{A.12}
$$

式 (A.11) を使って CPT 非保存部分 Y_I を分離すれば，K → 2π の崩壊振幅は

$$
\begin{aligned}
T_I &=< 2\pi, I|T|\mathrm{K}^0 >= A_I(1+Y_I)\mathrm{e}^{i\delta_I} \\
\overline{T}_I &=< 2\pi, I|T|\overline{\mathrm{K}}^0 >= A_I^*(1-Y_I^*)\mathrm{e}^{i\delta_I}
\end{aligned}
\tag{A.13}
$$

と書ける．ここに δ_I はアイソスピン I 状態の散乱位相である．

CP 非保存項は $\Im A_I$ として現れるので，次のようにパラメータ化する．まず，次式によってパラメータ α を定義する．

$$
\alpha = \frac{< I=0|T|K_2 >}{< I=0|T|K_1 >} = \frac{< 0|T|\mathrm{K}^0 > - < 0|T|\overline{\mathrm{K}}^0 >}{< 0|T|\mathrm{K}^0 > + < 0|T|\overline{\mathrm{K}}^0 >} \approx i\frac{\Im A_0}{\Re A_0} + \Re Y_0
\tag{A.14}
$$

ここで，$\Re A_I \gg \Im A_I$，$|Y_I| \ll 1$ を仮定している．

次にアイソスピン $I = 0, 2$ の崩壊振幅パラメータ ε_0，ε_2 を定義する．

$$
\varepsilon_0 = \frac{< 0|T|L >}{< 0|T|S >} = \frac{< 0|T|K_2 > + \varepsilon_{\mathrm{L}} < 0|T|K_1 >}{< 0|T|K_1 > + \varepsilon_{\mathrm{S}} < 0|T|K_2 >} \approx \alpha + \varepsilon_{\mathrm{L}}
\tag{A.15}
$$

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{< 2|T|L >}{< 0|T|S >} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{< 2|T|K_2 > + \varepsilon_{\mathrm{L}} < 2|T|K_1 >}{< 0|T|K_1 > + \varepsilon_{\mathrm{S}} < 0|T|K_2 >} \\
&\approx \varepsilon' + \varepsilon_0\omega
\end{aligned}
\tag{A.16}
$$

$$
\varepsilon' = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{< 2|T|K_2 >}{< 0|T|K_1 >} - \alpha\omega \approx i\omega\left(\frac{\Im A_2}{\Re A_2} - \frac{\Im A_0}{\Re A_0}\right) - \omega(\Re Y_0 - \Re Y_2)
\tag{A.17}
$$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{< 2|T|K_1 >}{< 0|T|K_1 >} \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\Re A_2}{\Re A_0} \mathrm{e}^{i(\delta_2 - \delta_0)} \tag{A.18}$$

ω は，$\Delta I = 1/2$ を破る遷移の相対振幅であり，$\mathrm{K}^+ \to \pi^+\pi^-$ と $\mathrm{K_S} \to \pi^0\pi^0$, $\pi^+\pi^-$ 崩壊率から絶対値と位相を求めることができる．

$$|\omega| \approx 3.19 \times 10^{-2}, \quad \arg\omega \approx \pm 55.6\,\mathrm{deg} \tag{A.19}$$

となるが，この位相は $\pi\pi$ 散乱より得られる位相差，$\delta_2 - \delta_0 = -43.7\,\mathrm{deg}$ と大体一致している．

$|\mathrm{K}^0 >$ と $|\overline{\mathrm{K}}^0 >$ の相対位相差はストレンジネス保存により任意にとれるので，α もまた任意に変えられる． この自由度を使って $\Im\alpha = 0$ となるようにパラメータを選ぶことがしばしばある．これをウー・ヤンの位相と呼ぶ．この場合，崩壊パラメータ ε_0 は混合パラメータ ε_L に一致する．ただし，標準理論では ε' はいわゆるペンギン図に起因し，$|\overline{\mathrm{K}}^0 >= \mathrm{CP}|\mathrm{K}^0 >$ と定義した場合は $\Im A_0 \neq 0$ を与えるので，ここの議論では α を残しておくことにする． ε_0 が混合パラメータと同一視できるので，ε' が K 崩壊における CP の直接の破れを表す．位相の定義により変わるパラメータは観測量ではないから，ε_L は観測量ではなく $\Re\varepsilon_\mathrm{L}$ が観測量であり，$\mathrm{K_L}$ の崩壊非対称を測定して得られる．ε_S も同様である．これに反し，ε_0，ε_2，ε' は位相の取り方によらない観測量である．

$\mathrm{K} \to 2\pi$ の CP 非保存崩壊における観測量 η を次式で定義し，式 (A.12) を使って $\varepsilon_0, \varepsilon_2, \varepsilon'$ 等で書き直すと

$$\eta_{+-} = \frac{< \pi^+\pi^-|T|\mathrm{K_L} >}{< \pi^+\pi^-|T|\mathrm{K_S} >} = \frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_2}{1 + \omega} \approx \varepsilon_0 + \varepsilon' \tag{A.20}$$

$$\eta_{00} = \frac{< \pi^0\pi^0|T|\mathrm{K_L} >}{< \pi^0\pi^0|T|\mathrm{K_S} >} = \frac{\varepsilon_0 - 2\varepsilon_2}{1 - 2\omega} \approx \varepsilon_0 - 2\varepsilon' \tag{A.21}$$

実験的には，$\eta_{+-} \approx \eta_{00} \approx \varepsilon_0$ が成立するので，$|\varepsilon_0| \gg |\varepsilon'|$ である．また，$\arg\varepsilon' = \pi/2 + \delta_2 - \delta_0 \approx \pi/4 \approx \phi_\mathrm{W}$ である．

$\mathrm{K_L} \to \pi l \nu$　　式 (A.11) を使えば，K の準レプトン崩壊振幅は次のように表せる．

$$< \mathrm{e}^+\pi^-\nu|T|\mathrm{K}^0 > = a + b \equiv A_{Kl\nu}(1 - y)$$

$$< \mathrm{e}^-\pi^+\overline{\nu}|T|\overline{\mathrm{K}}^0 > = a^* - b^* \equiv A^*_{Kl\nu}(1 + y^*) \tag{A.22}$$

$$< \mathrm{e}^-\pi^+\overline{\nu}|T|\mathrm{K}^0> = c + d$$
$$< \mathrm{e}^+\pi^-\nu|T|\overline{\mathrm{K}^0}> = c^* - d^* \qquad \text{(A.23)}$$

y は K の準レプトン崩壊における CPT の直接の破れを表すパラメータである．ここで

$$x = \frac{c^* - d^*}{a+b}, \quad \overline{x} = \frac{c^* + d^*}{a-b}, \quad x_\pm = \frac{x \pm \overline{x}}{2} \qquad \text{(A.24)}$$

を定義する．x，$\overline{x}$ は $\Delta S/\Delta Q = 1$ 則の破れを示す．CPT 保存の破れを議論するときは，本来ならば $\Delta S/\Delta Q = 1$ 則の検証を済ませた上でないとあまり意味のある議論とはならないが，ここでは簡単のため $\Delta S/\Delta Q = 1$ 則は成り立っている $(x = \overline{x} = 0)$ と仮定して

$$|\mathrm{K_S}> = \sqrt{2}N_\mathrm{S}(|K_1> + \varepsilon_\mathrm{S}|K_2>)$$
$$= N_\mathrm{S}[(1+\varepsilon_\mathrm{S})|\mathrm{K}^0> + (1-\varepsilon_\mathrm{S})|\overline{\mathrm{K}^0}>]$$
$$|\mathrm{K_L}> = \sqrt{2}N_\mathrm{L}(|K_2> + \varepsilon_\mathrm{L}|K_1>)$$
$$= N_\mathrm{L}[(1+\varepsilon_\mathrm{L})|\mathrm{K}^0> - (1-\varepsilon_\mathrm{L})|\overline{\mathrm{K}^0}>] \qquad \text{(A.25)}$$

を使えば

$$< \mathrm{e}^+\pi^-\nu|T|\mathrm{K_S}> = N_\mathrm{S}a(1-y)(1+\varepsilon_\mathrm{S})$$
$$< \mathrm{e}^+\pi^-\nu|T|\mathrm{K_L}> = N_\mathrm{L}a(1-y)(1+\varepsilon_\mathrm{L})$$
$$< \mathrm{e}^-\pi^+\overline{\nu}|T|\mathrm{K_S}> = N_\mathrm{S}a^*(1+y^*)(1-\varepsilon_\mathrm{S})$$
$$< \mathrm{e}^-\pi^+\overline{\nu}|T|\mathrm{K_L}> = -N_\mathrm{L}a^*(1+y^*)(1-\varepsilon_\mathrm{L}) \qquad \text{(A.26)}$$

となるので，長寿命 K メソンの崩壊非対称は

$$A_\mathrm{L} = \frac{\Gamma(\mathrm{K_L} \to \mathrm{e}^+\pi^-\nu) - \Gamma(\mathrm{K_L} \to \mathrm{e}^-\pi^+\overline{\nu})}{\Gamma(\mathrm{K_L} \to \mathrm{e}^+\pi^-\nu) + \Gamma(\mathrm{K_L} \to \mathrm{e}^-\pi^+\overline{\nu})} = 2\Re(\varepsilon_\mathrm{L} - y) \qquad \text{(A.27)}$$

A.4　2 体のシュレーディンガー方程式とユニタリティ

崩壊を許す 2 体系のシュレーディンガー方程式は，質量行列を $\tilde{\mathcal{M}}$ として

$$i\frac{\partial|\psi>}{\partial t} = \tilde{\mathcal{M}}|\psi> = \left(\boldsymbol{M} - i\frac{\boldsymbol{\Gamma}}{2}\right)|\psi> \qquad \text{(A.28)}$$

$\boldsymbol{M}$ と $\boldsymbol{\Gamma}$ は混合行列と崩壊行列を表し，摂動の 2 次近似で

$$M_{ij} = <i|\boldsymbol{M}|j> \\ = M_j\delta_{ij} + <i|H_\mathrm{W}|j> + \sum_{n\neq \mathrm{K}^0,\overline{\mathrm{K}}^0} P\frac{<i|H_\mathrm{W}|n><n|H_\mathrm{W}|j>}{M_j - E_n} \quad (\mathrm{A.29})$$

$$\Gamma_{ij} = <i|\boldsymbol{\Gamma}|j> \\ = 2\pi \sum_{n\neq \mathrm{K}^0,\overline{\mathrm{K}}^0} \delta(M_j - E_n) <i|H_\mathrm{W}|n><n|H_\mathrm{W}|j> \quad (\mathrm{A.30})$$

と表される．P は主値を意味する．H_W は弱い相互作用ハミルトニアンである．確率を保存しないから $\tilde{\mathcal{M}}$ はエルミートでないが，$\boldsymbol{M}$，$\boldsymbol{\Gamma}$ はエルミートである．$|\mathrm{K_S}>$，$|\mathrm{K_L}>$ は崩壊の固有状態であるので

$$i\frac{\partial|\mathrm{K_S}>}{\partial t} = \lambda_\mathrm{S}|\mathrm{K_S}> = (m_\mathrm{S} - i\frac{\Gamma_\mathrm{S}}{2})|\mathrm{K_S}> = (\boldsymbol{M} - i\frac{\boldsymbol{\Gamma}}{2})|\mathrm{K_S}> \quad (\mathrm{A.31})$$

$$i\frac{\partial|\mathrm{K_L}>}{\partial t} = \lambda_\mathrm{L}|\mathrm{K_L}> = (m_\mathrm{L} - i\frac{\Gamma_\mathrm{L}}{2})|\mathrm{K_L}> = (\boldsymbol{M} - i\frac{\boldsymbol{\Gamma}}{2})|\mathrm{K_L}> \quad (\mathrm{A.32})$$

ここに，$M_\mathrm{S,L}$，$\Gamma_\mathrm{S,L}$ は $\mathrm{K_S}$，$\mathrm{K_L}$ の質量と崩壊幅である．式 (A.31) のエルミート共役に右から $|\mathrm{K_L}>$ を掛け，式 (A.32) に左から $<\mathrm{K_S}|$ を掛けて引き算すれば

$$(\lambda_\mathrm{L} - \lambda_\mathrm{S}^*) <\mathrm{K_S}|\mathrm{K_L}> = -i <\mathrm{K_S}|\boldsymbol{\Gamma}|\mathrm{K_L}> \quad (\mathrm{A.33})$$

$$2(i\Delta m + \frac{\Gamma_\mathrm{S} + \Gamma_\mathrm{L}}{2})(\Re\varepsilon - i\Im\delta) = 2\pi\sum_n \delta(M_K - E_n) <\mathrm{K_S}|T|n><n|T|\mathrm{K_L}> \\ \simeq \sum \Gamma(\mathrm{K_S} \to 2\pi)\eta_{\pi\pi} + \sum \Gamma(\mathrm{K_L} \to 3\pi)\eta_{\pi\pi\pi}^* + 2[\Re\varepsilon - \Re y - i\Im\delta]\Gamma(\mathrm{K_L} \to \pi l\nu) \quad (\mathrm{A.34})$$

$$\Delta m = m_\mathrm{L} - m_\mathrm{S} \quad (\mathrm{A.35})$$

ただし，$\eta_{\pi\pi\pi} = <3\pi|T|\mathrm{K_S}> / <3\pi|T|\mathrm{K_L}>$ は，2π 崩壊の $\eta_{\pi\pi}$ に対応する 3π 崩壊での CP の破れを表すパラメータである．上の式で，式 (A.34) の第 2 行に移るとき，中間状態は 2π，3π，$Kl\nu$ のみを考慮した．この式をユニタリー条件というが，それは $|\mathrm{K_S}>$，$|\mathrm{K_L}>$ の時間変化で確率が 1 より減った部分は崩壊確率の和で与えられるという確率保存の式を表すからである．

参考文献

1) J. H. Christenson, J. Cronin, V. Fitch & R. Turlay : *Phys. Rev. Lett.*, **13**, 138(1964)
2) 大場一郎：小林–益川理論（物理学最前線 **16**），共立出版（1986）
3) ブルーノ・エルンスト著，板根　厳訳：エッシャーの世界，朝日新聞社（1983）
4) M. ガードナー：小島　弘，坪井忠二訳，自然界における左と右，紀伊国屋書店（1971）
5) 江沢　洋：パリティの問題（サイエンス叢書「右と左」），サイエンス社（1980）
6) C. S. Wu *et al.* : *Phys. Rev.*, **105**, 1413(1957)
7) V. F. ワイスコップ著，藤田純一，吉田思郎訳：現代物理学の意味，講談社（1979）
8) A. D. Sakharov : *Pizma ZhETF*, **5**, 32(1967)
9) M. Yoshimura : *Phys. Rev. Lett.*, **41**, 281(1978)
A. Y. Ignatiev *et al.* : *Phys. Lett.*, B**76**, 436(1978)
S. Dimopoulos & L. Susskind : *Phys. Rev.*, D**18**, 4500(1978)
S. Weinberg : *Phys. Rev. Lett.*, **42**, 850(1979)
10) Particle Data Group : *Euro. Phys. J.*, C**3**(1998)
11) E731 : L. K. Gibbons *et al.* : *Phys. Rev. Lett.*, **70**, 1199, 1203(1993)
12) NA31 : G. D. Barr *et al.* : *Phys. Lett.*, B**317**, 233(1993)
13) KTeV : E. Blucher : Talk at LP99, Stanford, US. (1999)
14) NA48 : G. Barr : Talk at LP99, Stanford, US. (1999)
15) CPLEAR : A. Angelopoulos *et al.* : *Phys. Lett.*, B**444**, 43(1998)
16) CPLEAR : A. Angelopoulos *et al.* : *Phys. Lett.*, B**444**, 52(1998)
17) CPLEAR : A. Apostolakis *et al.* : *Phys. Lett.*, B**456**, 297(1999)
18) ARGUS : H. Albrecht *et al.* : *Phys. Lett.*, B**192**, 245(1987)
19) CLEO : M. Artuso *et al.* : *Phys. Rev. Lett.*, **63**, 2233(1989)
20) OPAL : K. Ackerstaff *et al.* : *Z. Phys.*, C**76**, 401, 417(1997)
21) A. Falks : Talk at LP99, Stanford, US. (1999)
22) I. I. Bigi & A. I. Sanda : *Nucl. Phys.*, B**193**, 85(1981), B**281**, 41(1987)
I. I. Bigi & A. I. Sanda : hep-ph/9904484
23) OPAL : K. Ackerstaff *et al.* : *Euro. Phys. J.*, C**5**, 379(1998)
24) CDF : F. Abe *et al.* : *Phys. Rev. Lett.*, **81**, 5513(1998)
M. Paulini : Talk at LP99, Stanford, US. (1999)

25) A. J. Buras & J. -M. Gerrad : *Phys. Lett.*, B**203**, 272(1988)
26) K. R. Shubert : *Prog. Theor. Nucl. Phys.*, **21**, 3(1988)
27) A. J. Buras, M. Jamin & M. E. Lautenbacher : *Nucl. Phys.*, B**415**, 403(1994)
A. Bulas : hep-ph/9711217
28) A.J.Buras & L.Silvestrini : hep-ph/9811471
29) G. Buchara & A. J. Buras : *Phys. Rev.*, D**54**, 6782(1996), hep-ph/9901288

高速イオンビームの結晶化

岡本宏巳

はじめに

私の専門分野は，欧米では“ビーム物理(Physics of Beams)”と呼ばれている．が，残念なことに，それが一体どのような分野なのかを理解している研究者の数は日本国内ではかなり限られているようである．ビーム物理とは，その名が示すとおり，“ビーム”の物理的性質を研究する学問である．ここでいう“ビーム”とは“空間的に局所化された同一基本粒子（電子，イオン，反粒子，光子，など）の集合”のことであり，多くの場合，加速器によって生成された粒子群を指す．もっとも，この分野の歴史はまだ浅く，したがってビーム物理の研究対象のみならずビームの定義自体も人によってまちまちであったりする．例えば，私個人は（多少厳密性は欠くものの）上記の定義でほぼ問題ないと考えているが，粒子群の重心が実験室系で高速運動していることをビームの満たすべき条件のひとつに加える人も多いようである．

ビーム物理が誕生した背景には，加速器の発展とその応用範囲の急速な拡大がある．もともと加速器は核物理の研究用として開発されたわけだが，今日では医学，工学，物質・材料科学，産業などを中心とした非常に幅広い分野で積極的に利用されている．将来的にも，加速器技術のさらなる発展を前提として，より高度なプロセッシング技術，癌治療法，放射光技術，材料分析法，エネルギー発生法，消滅処理技術等々，多くの次世代ビーム利用法が発案・検討されている．規模や予算額がきわめて大きいため，高エネルギー物理実験用の加速器ばかりがクローズアップされる傾向にあるが，このような巨大加速器はむしろ例外的なものなのである．

ビームは通常きわめて高温であり，一種の電離気体として広い意味でのプラズマに含めることができると思う．実際，ビームは物質の一形態として物理的に興味深い様々な集団現象を示すことが知られている[1]．他方，ビームの研究者

は基礎物理的な興味のみに基づいて仕事をしているわけではなく，むしろビームの新しい応用や加速器の性能向上を目指す必要に迫られているケースが多い．ビームの基本的性質が深く理解されれば，その知見はビームの質や制御法の改善につながり，ひいてはビームを必要とする数多くの分野に貢献することになる．得られた成果が端的に異分野，それも多種多様な分野の研究に寄与する可能性があるというのはビーム物理のもつ大きな特徴である．アメリカ物理学会には 1985 年にビーム物理分科[2)]が設置されたが，国内でも同様の組織を形成しようという動きがここ数年活発化してきている[3)]．

以下で紹介するのはビーム物理学上の研究テーマの中でもとりわけアカデミックな色彩の濃い最先端のものである．その意味で，「物理学最前線」という書名にふさわしいトピックスといえるだろう．ただし，最先端であるが故に十分に理解されていない事柄も多い．したがって，ここに書かれている内容がすべて証明済みの事実であるなどとは決して思わないでいただきたい．実際，この小論の主題である“高速イオンビームの結晶化”を達成した人間は，今のところ世界中どこにもいないのである．

1章 クリスタルビーム

われわれの最終的な目標は“クリスタルビーム”を生成することである．細かい議論は後回しにして，まず「クリスタルビームとは一体何なのか」について説明するところから始めたいと思う．目指す対象を知った上で，それをいかにして実現するかを次章以下で考えていきたい．

1.1 ビームの温度

冒頭でも触れたが，加速器中を走っている高速ビームの温度はきわめて高い．ビーム温度は重心系でビームとともに走りながら定義されるが，その値は一般に室温（およそ 300 K）などとは比べものにならない．ビームは膨大な数の荷電粒子から構成されているのが普通であるが，個々の粒子がもつ運動エネルギーにはかなりのばらつきがある．このばらつきが有限の温度を生む．逆にいえば，すべての粒子の運動エネルギーがそれらの平均値にほぼ等しいとき，ビーム温度は絶対零度に近いわけである．だが現実には，ビームは空間的な拡がりをもっており，かつ集束電磁場の影響を不連続的に受けながら飛んでいる．この場合，重心系においてすべての粒子が完全に静止した状態を創り出すことは，（後述する 1 次元の紐状クリスタルビームを生成する以外には）不可能である．

非常に大雑把な計算をやってみよう．いま，一周の軌道長がちょうど 100 m のビーム蓄積リング*があり，その中を断面の半径が数センチメートル程度の陽子ビームが 1 MeV のエネルギーで回っているとする．ビームの進行方向に垂直な平面（以下，“横方向”自由度と呼ぶ）内で，各粒子がリング一周当たり 5 回振動するとすると，ビーム温度 $T_\perp$ はどの程度になるであろうか？

*リング状の加速器であるが，粒子群を長時間安定に蓄積することが主目的なので，シンクロトロンのようにビームのエネルギーを単調に増大させるようなことは行わない

まず，陽子ビームの重心は 1 MeV の運動エネルギーをもっているので，個々の陽子はこのリングを毎秒およそ 14 万回転する．一方，横方向振動の平均的な振幅が 1 cm 程度であると仮定すると，1 回の振動で陽子は 4 cm ほど動くことになる．よって，リング一周当たりの移動距離は 4 cm × 5 振動=20 cm ぐらいである．速度に換算するには一秒当たりの回転数，すなわち 14 万回をかければよいので，横方向自由度における陽子のおおよその平均速度として毎秒 28 km という値を得る．この運動エネルギーをさらに温度に換算すると，$T_\perp$ は 10^4 K を超えることがわかる．以上は，陽子の空間分布の詳細などを全く無視した粗い計算ではあるが，ビームの温度がいかに高いかを知る目安にはなったと思う．

ビームの進行方向自由度に関する温度は，個々の粒子の運動量が設計値 p_0 からどの程度ずれているかを知ることによって評価できる．運動量のばらつきの標準偏差を Δp，またビームの重心運動エネルギーを E_0[eV] とすると，進行方向の温度は

$$T_\parallel[K] \approx 2.23 \times 10^4 \left(\frac{\Delta p}{p_0}\right)^2 E_0 \qquad (1.1)$$

のように書ける．上の例で $\Delta p/p_0$ を 0.1%程度と仮定すると，$E_0 = 10^6$[eV] なので，$T_\parallel$ は $T_\perp$ と同じオーダーとなる．

ここで用いられたビーム温度はごく普通の熱力学的な定義に基づくものである．つまり，個々の粒子がもつ運動エネルギーの平均値にほかならない．しかしながら，このような温度の定義は，ビーム物理的には必ずしも便利なものではない．例えば，ビームが安定な定常状態にある場合でも，熱力学的な温度は場所の関数になってしまう．これは，不連続的な集束場の影響によって，ビームの大きさがリング上の場所場所で変化するためである．一般に，ビームサイズが小さいところではビーム温度が上昇し，逆にサイズが大きくなると温度が下がる．平衡状態では，ビームの大きさの変化は当然周期的になる（つまり，リングを一周すればもとの形に戻る）ので，ビーム温度も周期的に変動する．温度のもつこのような曖昧さを排除した，粒子ビームの力学系においてより重要な“熱さ”の指標は“エミッタンス”と呼ばれている．大雑把にいって，エミッタンスはビームサイズとビーム温度の積の平方根に比例する物理量である．

1.2　ビームの冷却

ビーム冷却とは，正確には，ビームの温度を下げることではない．上述したように，ビーム温度を変化させるだけならば，ビームを細く絞ったり，あるいは発散させたりすれば事足りる．「ビームを冷却する」というのは「エミッタンスを小さくする」ということと同義である．エミッタンスは“μ位相空間上でビームが占有する体積”として定義することができ，個別粒子間のクーロン衝突効果を無視する近似で保存量となる．これは，“加速器”という力学系がハミルトン系であることに関係している．ただし，高エネルギー電子ビームの系は，電子軌道が曲げられると制動輻射によってエネルギーが減衰するため，散逸系として取り扱わなければならない．このとき，エミッタンスはある平衡値まで勝手に小さくなっていく(放射冷却)．イオンビームも当然電子ビームと同様の放射機構を備えてはいるが，その質量が電子に比べてはるかに大きいため，放射冷却効果は一般に無視できる．

結局，イオンビームの冷却が難しいのは，エミッタンスが原理的な保存量だからである．イオンビームのエミッタンスを縮小するには，何らかの人為的な散逸効果を導入しなければならない．現時点で十分に確立されているイオンビーム冷却技術は以下の3つである[4)]：

(A). 電子冷却法（electron cooling）
(B). 確率冷却法（stochastic cooling）
(C). レーザー冷却法（laser cooling）

電子冷却法の原理は単純明快で，熱いイオンビームを特別に用意した冷たい電子ビームと相互作用させ，イオンビームから電子ビームへ熱を移してやるというものである．具体的には，図1.1に示されているように，蓄積リング上のある領域で電子ビームとイオンビームを併走させる．熱くなった電子ビームは捨て去られ，やや温度の下がったイオンビームのみがリングを周回する．イオンビームはリングを一周してもとの場所に戻り，再び冷たい電子ビームと相互作用する．この過程が何度も繰り返されるうちに，イオンビームの温度はどんどん下がっていくわけである．

一方，確率冷却法の原理はもっと複雑怪奇である．まず，リング上のある場所に“ピックアップ”という，ビームからの信号を感知する測定器を置く（図

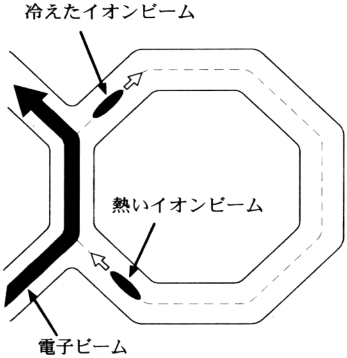


図 1.1　電子冷却法の概念図

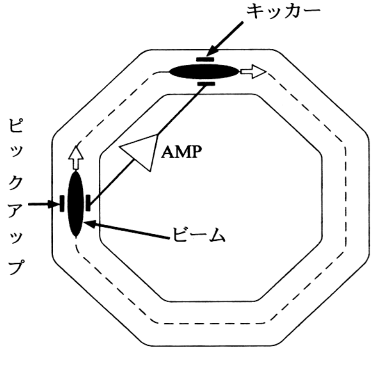


図 1.2　確率冷却法の概念図

1.2)．ピックアップはビームの一部分を観測し，その重心が設計軌道からどの程度ずれているかを計測した上で，得られた情報を別の位置に設置された“キッカー”と呼ばれる装置に伝達する．キッカーはピックアップからの情報をもとに，ビームの同一部分に電気的な力を加え，軌道のずれを補正する．この手続きを毎周回行うのである．

ところが，ビームに含まれる個々の粒子は 3 次元的に振動しているので，ある程度時間がたてばランダムに混ぜ合わされてしまう．つまり，キッカーから力を受ける粒子群は，ピックアップによって観測された粒子群とは厳密には異なるはずである．またもし逆に，キッカーによって平均的位置の補正を受ける部分に含まれている粒子の集合が常に一定であるならば，その集合に含まれない粒子群には当然の事ながら何の効果も与えようがない．

確率冷却法では，この問題を半ば強引な論法で回避する．すなわち，「ピックアップからキッカーまでビームが移動する際には，粒子の混ぜ合わせ（mixing）がほとんど起こらず，ほぼ同一の粒子群に働きかけることができる．その一方で，ビームがキッカーを通り過ぎて，次にピックアップの地点へ帰ってくる間には粒子が十分に混ぜ合わされ，先刻軌道補正を受けた粒子集合の情報は失われている．したがって，周回のたびに異なる一群の粒子に対し，軌道の補正を実行することができる.」という虫のいいことを主張するのである．ピックアップからキッカーまでの距離をキッカーからピックアップまでの距離に比べて短

くとれば，この主張の正当性を多少なりとも高めることができる．いずれにしても，このアイデアは成功をおさめ，発案者であるバン・デル・メーア氏はノーベル賞を受賞した．

1.3　レーザー冷却法

電子冷却法や確率冷却法によって到達可能なビーム温度はそう低いものではない．私の知る限り，今のところせいぜい 10〜100 K のオーダーである．これに対し，レーザー冷却法の適用によって実現できるビーム温度はほとんど絶対零度に近い．つまり，重心系で見た場合，それぞれのイオンがほぼ静止した状態をつくり出すことが少なくとも原理的には可能である．レーザー冷却の概念自体はそれほど新しいものではなく，イオントラップなどを用いた実験に様々な形で応用され，すでに数多くの成果を上げている．つい最近（1997 年）のノーベル賞もレーザー冷却技術に関連した研究成果に対して与えられている．しかしながら，この技術が蓄積リング中を周回する高速ビームに初めて適用されたのは 1990 年前後のことであり，ビーム冷却法としての歴史はまだ浅いといえる．

現時点では，レーザー冷却装置を完備したビーム蓄積リングは世界に 2 台しか存在しない．ひとつは，ドイツのハイデルベルグにあるマックスプランク研究所の通称 TSR リング[5]，もう 1 台はデンマークのアーハス（Aarhus）大学で稼働中の ASTRID リング[6]である．これらのグループでは共に 1990 年頃，高速イオンビームのレーザー冷却に成功している．現在までに達成された最も低いビーム温度はおよそ 0.001 K である．

レーザー冷却法の原理について簡単に触れておこう（より詳しくは他の専門書[7]を参考にされたい）．まず，基底状態にある 1 個の原子を考える（図 1.3(a)）．この原子が波長 λ のフォトンを共鳴的に吸収して励起される際，原子の運動量はフォトンが進行していた方向に h/λ（h はプランク定数）だけ変化する（図 1.3(b)）．十分に短い時間の後，原子は自然にフォトンを放出して基底状態に戻る（図 1.3(c)）とすると，再度ほぼ同じ波長のフォトンを吸収させることができる．つまり，フォトンの吸収–自然放出の過程を連続的に起こすことが可能となるわけである．なお，原子は自然放出の際の反跳で再び h/λ の運動量変化を経

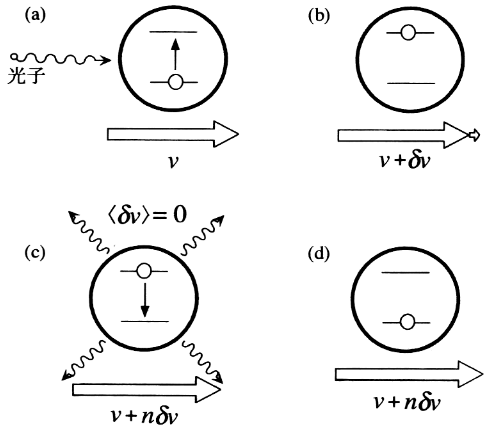


図 1.3　レーザー冷却過程の基本サイクル

験するが，フォトンの放出は等方的に起こるので，多数回の吸収–自然放出過程を経た後の反跳による運動量変化はならされてゼロになる．結局，生き残るのはフォトンを吸収する際の運動量変化だけであり(図 1.3(d))，その値は通常ビームが有する運動量のばらつきに比べて桁違いに小さい．また，このフォトン吸収過程における運動量変化の方向はレーザーの照射方向に一致するので，人間が好き勝手に選ぶことができる．

以上のサイクルに基づいてイオンビームの冷却を行うには，ドップラー効果を利用する．まず，初期ビームの運動量分布が図 1.4(a) のような形でばらつい

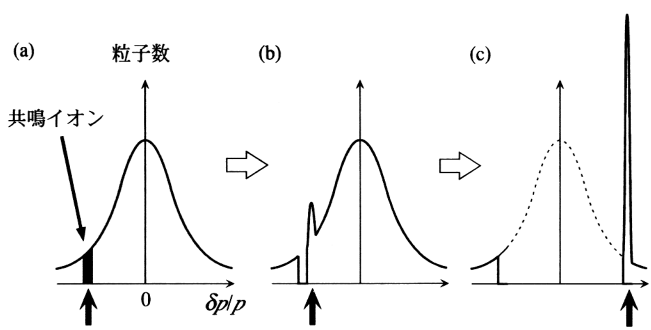


図 1.4　レーザー冷却による粒子分布の変化

ていたとする．イオンの“見る”フォトンの波長は，そのイオンの速度に依存してドップラーシフトしている．波長のシフト量が大きいと，イオンはもはやフォトンをうまく吸収することができなくなってしまう．

いま，図1.4(a)上の矢印の部分の運動量をもつイオンが，ドップラーシフトの分も考慮してフォトンと共鳴するよう，レーザーシステムを調整しておいたとしよう．また，レーザー光はビームの進行方向に向かって照射したとする*．このとき，共鳴イオン群はフォトンの吸収によってわずかに速度を増し，図1.4(b)のように小さなピークをつくる．次に，レーザーの波長を少し変えて，今度はいま形成されたばかりの小ピークに含まれているイオン群とフォトンを共鳴させる．すると，この小ピーク全体がさらに右へ移動することになる．このように，レーザーの周波数を徐々に変化させることによって，最終的にビームの運動量分布を図1.4(c)のような1本の鋭いピークに変えることができる．ビーム温度とイオン運動量のばらつきの度合いとは等価であるから，図1.4(c)の状態にあるビームは図1.4(a)の初期ビームに比べてずっと冷たいといえる．図1.4(c)のピークの幅は，温度に換算すると，典型的にはmKのオーダーである．以上の過程は明らかに散逸を伴っており，温度が下がるに従ってビームのエミッタンスもどんどん小さくなっていく．

参考のため，図1.5にASTRIDリングの模式図を掲げておく．このリングは——TSRリングもそうであるが——正方形をしており，周長は40 mである．蓄積されたイオンは，横方向平面内でリング一周当たり2〜3回程度振動するよう設計されている．冷却用レーザーは正方形の辺の部分でビームと平行に導入される．先に触れたように2本のレーザーを用い，1本はビームの進行方向に，もう1本は進行方向とは逆の方向から照射することもある．

因みに，ASTRIDやTSRでは，$^{7}Li^{+}$，$^{9}Be^{+}$，$^{24}Mg^{+}$などの冷却が行われている．冷却されたイオンビームは，原子・分子物理学の実験に用いられたり，また基礎ビーム物理学的観点からも低温ビームの物性を理解する上で貴重なデータを供給している．これらのグループが目指している究極の目標はやはり“ク

---

*実際には，逆方向からもレーザーを照射してイオン運動の安定点をつくっていることが多い．1本のレーザーで冷却を行う場合には，高周波電場を導入してビームを進行方向に集群させるか，あるいは非常に低い定電圧をかけてイオンを加速(または減速)するかしている．

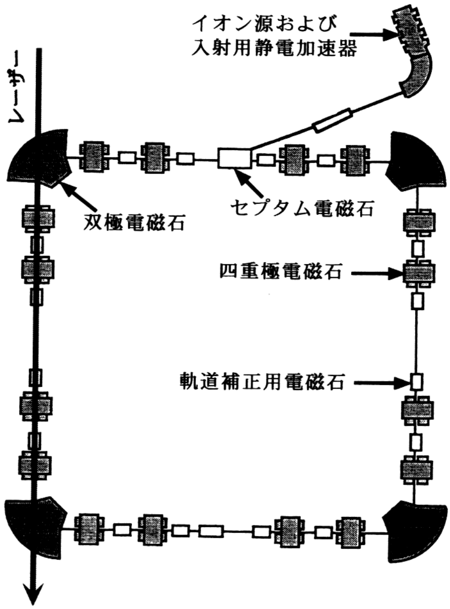


図 1.5　ASTRID リングの模式図

リスタルビームの生成”であろうが，残念ながら，ゴールはまだまだ遠いといわざるを得ないのが現状である．

1.4　レーザー冷却法の問題点

レーザー冷却法は，原理的に到達可能なビーム温度という点では，他の冷却法をはるかに凌駕している．しかしながら，同時にいくつかの問題点も抱えている．まず，「簡単に手に入るレーザーの波長域はかなり限られているので，任意のイオンを冷却するというわけにはいかない」という欠点がある．また，励起されたイオンがフォトンを自然放出した後，フォトンを吸収する前の準位に再帰してくれればよいが，そうでない場合，複数のレーザーが必要になる．

「レーザーによる散逸力が1次元的である」という事実も問題視されている．レーザーは，ビームとフォトンが相互作用する時間を十分に確保する必要上，図1.5のように蓄積リングの直線部に入射される．このとき，レーザー冷却法の

原理を思い起こせば明らかなように，われわれが直接コントロールできるのはビームが進行している方向の運動量成分だけである．レーザーを真横からビームにあてたり，あるいは斜入射したりしたとしても，レーザーのスポットサイズはかなり小さいものであるし，またイオンはきわめて高速で走っているため，効率の良い冷却は事実上困難である．

ビームが真空パイプの中を周回しており，かつ電磁石や計測モニター，高周波空胴などの障害物がそこら中に並んでいるという事実も選択肢を狭める要因となっている．前節で，「現在までに達成された最も低いビーム温度はおよそ0.001 Kである」と書いたが，この0.001 Kという値は，実はビームの進行方向自由度に関して定義された温度を表しているに過ぎない．ASTRIDやTSRでの実験結果に関する限り，横方向自由度における平衡ビーム温度は進行方向のそれより数桁以上も高いことが知られている．

高速ビームのレーザー冷却を考える際に直面する，より本質的な問題は「蓄積リングには不可避的に“運動量分散”が存在する」という事実である．ここでいう運動量分散とは，粒子のもつ運動量の大きさに依存した軌道長の変化のことである．蓄積リングでは，設計軌道を閉じたものにする必要上，双極磁場を使って，所々でイオンの軌道をねじ曲げている．イオンの電荷を q，運動量を p_0 とすると，磁束密度 B の一様磁場中におけるイオンの軌道曲率半径 ρ_0 は

$$\rho_0 = \frac{p_0}{qB} \tag{1.2}$$

で与えられる．したがって，運動量の大きなイオンほど大きな曲率半径をもつことになる．後に明らかにするが，蓄積リングのもつこの性質のため，通常のレーザー冷却法では安定なクリスタルビームを生成することができない．

1.5　回　想

私がレーザー冷却関連の研究に初めて手を染めたのは，1993年の秋であった．当時，私は客員研究員として米国のバークレーにいて，ワシントンDC郊外からカリフォルニア州へ引っ越してきたばかりであった．私はビーム冷却法に関しては全くの素人であった(現在もそうである)が，「レーザー冷却法では横方向のイオン運動が冷やせない」という話を最初に聞いたとき，すぐに納得のい

かないものを感じた．というのも，そもそもビームを形づくっている個々のイオンはその電荷に基づくクーロン場を媒介として常に相互作用しており，したがって横方向自由度はビーム進行方向の自由度と完全に独立ではありえないと思ったからである．言い換えれば，直接冷却されるのが進行方向自由度のみであったとしても，その効果はクーロン衝突を通じて，横方向自由度へも波及するはずだと考えたわけである．しかしながら，ASTRID や TSR での実験結果は，進行方向のビーム温度と横方向のビーム温度との間の極端なアンバランスを示しているとのことだった．依然として納得はいかなかったものの，同僚と共に横方向自由度のレーザー冷却効率を増大させる具体的方法について考え始め，数カ月後，3 章で解説する“共鳴結合法”というアイデアを定式化した[8,9]．

さらに何カ月かがたち，1994 年の 7 月初めにハイデルベルグで，レーザー冷却法やクリスタルビームに関するインフォーマルミーティングが開催されることになり，私も招待された．3 次元レーザー冷却に関するセッションでは，私以外にも地元の TSR グループから報告がなされることになっていた．私は共鳴結合法の理論について発表したわけだが，他方 TSR グループの研究者の講演題目は「Transverse Cooling by Intrabeam Collisions in a Laser-Cooled Beam at the TSR」というものであった[10]．この講演は，結局「クーロン散乱の効果によって，横方向自由度も間接的に冷えます」という内容のものであった．TSR グループが世界に先駆けて高速イオンビームのレーザー冷却に成功したのが 1990 年前後だから，クーロン場による横方向自由度の間接冷却効果を確認するまでに 4 年以上の歳月を費やしたわけである．因みに，私が自らの講演の中で「クーロン結合によって間接冷却が起こるのは当然のことであって，驚くにはあたらない」と口を滑らせた（？）ことが気に障ったのであろう，質疑応答の際，TSR でレーザー冷却実験を指揮していた某先生が憤慨して共鳴結合法を頭から否定し始めたのを覚えている．

クーロン結合によって間接冷却効果が得られるはずだという当初の予想は裏づけられたものの，会議の後も釈然としないものが残った．TSR グループの実験データを見る限り，横方向自由度のビーム温度と進行方向自由度のビーム温度との間の不均衡が依然として全く解消されていなかったからである．クーロン結合は常にそこに存在するわけであるから，何らかの要因によって冷却過程

が阻害されない限り，最終的な到達温度はすべての自由度で同じであるべきである．提示されたデータでは，レーザー冷却完了後のビーム温度が，進行方向で 1〜10 K，横方向で 1000 K 前後となっていたように思う．「なぜこのような温度不均衡が残るのか？」，私は当時その物理的理由を理解してはいなかったが，その後の研究によって TSR リングのラティス（電磁石などの配置パターン）に本質的な問題があるからだと信ずるに至った．ASTRID リングの構造にも，TSR リングと全く同様のビームダイナミックス上の問題がある．この点に関する議論は 3 章で行うことにする．

最後に，クーロン結合による間接冷却過程にはいくつかの難点があることを指摘しておく．まず，この間接冷却効果は密度の低いビームでは非常に弱いということである．何度も述べてきたように，通常の高速ビームはきわめて熱く希薄なため，クーロン衝突の影響は多くの場合近似的に無視される．したがって，一般的なイオンビームのレーザー冷却に際して，最初からクーロン結合の効果のみに期待することには無理があると思われる．加えて，横方向自由度の間接冷却効率は，レーザー冷却法本来の効率に比べてはるかに悪い．TSR リングでは，熱い初期ビームをいったん電子冷却し，冷却システムを切って 10 秒ほど待ってからレーザーを照射して再冷却している．（レーザー冷却の前に電子冷却を行っている正確な理由は私にはよくわからない．）電子冷却システムを停止すると，クーロン散乱効果が熱源として働き，3 次元的にビーム温度が上昇する．ある程度温度が上がったところで今度はレーザー冷却システムを作動すると，進行方向のビーム温度は電子冷却法の限界点を大きく超えて 1 K のオーダーまで瞬時にして下がってしまう．しかしながら，横方向自由度については，電子冷却システムを停止する直前と同じレベルの温度を 5 秒前後かけてゆっくり回復するにとどまっている．この間接冷却時間はビームの密度を下げるとさらに長くなる．あらゆる密度領域のイオンビームを効率良く 3 次元レーザー冷却するには，自然の効果に頼らない，何らかの新しいメカニズムが必要であろう．

1.6　高速イオンビームの結晶化

数万度をゆうに超える熱い物質を絶対零度付近まで冷却すれば，なんらかの質的な変化が観測されるのではないかと，誰しもが期待するだろう．そして実

際，ビームは冷却の過程である種の相転移を起こしうるのである．この“ビーム相転移”という概念が初めて真剣に議論されたのは，1970 年代の終わり頃である[11,12]．当時，ソビエトの NAP-M と呼ばれるリング——このリングはその後火事で焼けてしまったそうである——で電子冷却実験を行っていた加速器物理学者達は，冷却の過程でビームからの信号が突然異様に変化することに気づいた．この現象を説明するため，彼らはビームの内部構造にある種の規則性が生じたのではないかと推論した．ある研究会でこのアイデアを発表すると，当然のことながら，大激論が交わされることになったそうである．とにかく，加速器ビームに長く携わってきた人ほど，そのような事が現実に起こるとは到底信じられなかったのではないだろうか....

ビーム相転移という概念は恐らく 1980 年代の半ば頃まではほとんど夢物語の産物のように見なされていたのではないかと思う．その後，分子動力学法を用いたシミュレーション研究が進み[4,13–15]，ビームを 3 次元的に強く冷却すれば，個々のイオンが空間的に規則正しく配列した，ある種の結晶構造が実現されるはずだと多くの研究者が信じるようになった．実際，人為的な外部集束電磁場とイオン間のクーロン反発力とが絶妙にバランスして構築される特殊な結晶状態は，すでにイオントラップでは数多く観測されている[16–18]．

クリスタルビームは，イオントラップ中で生成されたクーロン結晶と物性的には等価な対象であると考えられる．この意味で，トラップにおけるクーロン結晶化の実現は，高速イオンビームの結晶化が原理的に可能であることを間接的に示したものであるとも解釈できる．ただし，蓄積リングがトラップよりも構造的にずっと複雑であること，とりわけ前述した運動量分散効果のため，クリスタルビームの生成はトラップ中でクーロン結晶を作ることに比べてはるかに難しい．リング状の高周波四重極トラップ中でレーザー冷却によりクーロン結晶化を達成したという実験報告[19]もなされてはいるが，だからといって，同じ方法でクリスタルビームを作れるということには決してならない．イオン群が双極場の影響下で高速回転していない以上，トラップ装置の見た目がリングの形をしていたとしても，それは普通のリニアポールトラップと本質的には変わるところがないからである．

クリスタルビームがどのようなものであるかを知るため，分子動力学シミュ

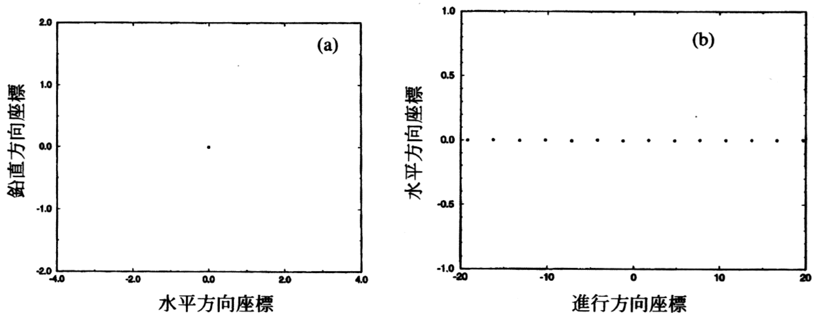


図 1.6　クリスタルビーム（1次元：紐状）

レーションの結果をいくつか披露しておこう．例として，1 MeV の運動エネルギーをもつ $^{24}Mg^{+}$ イオンのビームを仮想的に3次元冷却した場合を考える．また，蓄積リングのラティス構造としては，高エネルギー加速器研究機構の田無分室にある“TARN II”のものを仮定する．

まず，蓄積されているイオンの総数が小さいとき，ビームは図 1.6 に示されているような1次元の紐状クリスタルビームになる．図 1.6(a) はリング上のある場所で観測したビームの断面，また図 1.6(b) は同じビームを真上から眺めたものである．図の一目盛りは約 22 ミクロンで，ひとつの・が $^{24}Mg^{+}$ イオン1個に対応している．図 1.6(a) で，原点の位置に・がひとつだけ見えるのは，すべてのイオンが設計軌道上を走っているということである．実際，図 1.6(b) か

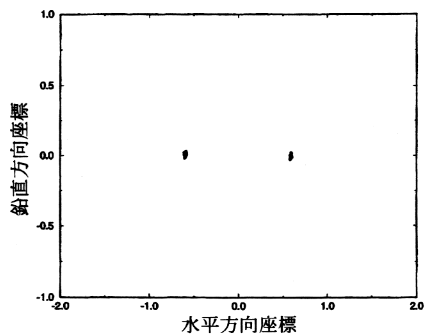


図 1.7　クリスタルビーム（2次元：ジグザグ状）の断面

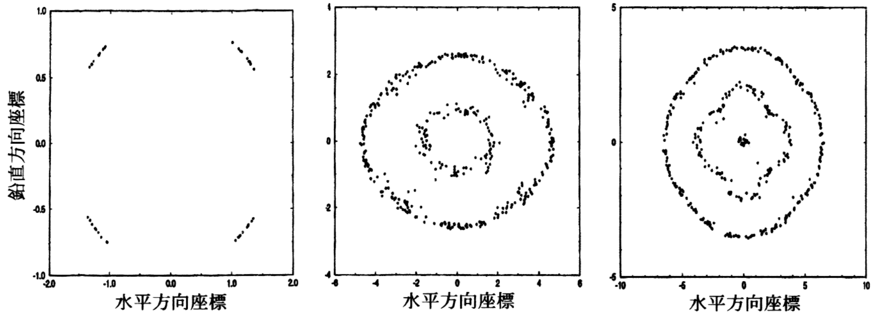


図 1.8　クリスタルビーム(3 次元：殻構造)の断面

ら，個々のイオンが等間隔で整列していることがわかる．蓄積イオンの総数を徐々に増やしていくと，イオン間の距離がだんだんと短くなり，あるしきい値を越えたところで，突然図 1.7 のような 2 次元のジグザグ構造へと変化する．さらにイオン数を上げていくと，図 1.8 のような 3 次元の殻構造が現れる．図 1.8 は 3 つの異なるクリスタルビームの断面を表しており，左図から右図へ向かって少しずつ蓄積粒子数を増やしてある．もっと粒子数を増やせば，より殻数の多いクリスタルビームを作ることができる．

リングに高周波空胴を設置してビームを進行方向にも集束（バンチ）することにより，図 1.6〜1.8 のような空間的に連続なトーラス状のクリスタルビームではなく，楕円体状のクリスタルビーム——“クリスタルボール”と呼ぶ人もいる——を生成することもできる．全く異なる条件下で行ったシミュレーショ

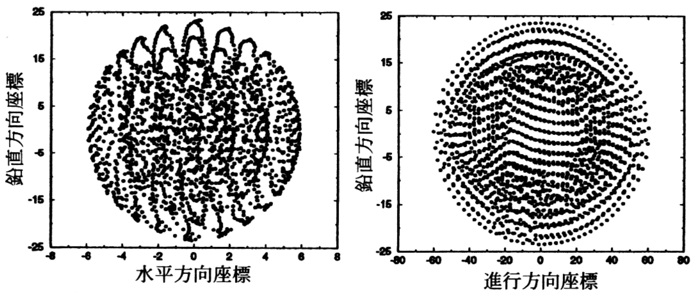


図 1.9　クリスタルボール

ンの結果ではあるが，参考のため，図 1.9 に典型的なクリスタルボールを示しておく．

2 次元および 3 次元のクリスタルビームは，外場の周期的な変動に合わせて，多少変形しながら飛んでいる．結晶構造自体が変化することはないが，全体として断面が扁平になったり丸くなったりする．したがって，1 次元の紐状結晶の場合を除き，クリスタルビームの有する熱力学的な温度はきわめて小さいが，厳密にゼロとなることはない．

1.7　クリスタルビームの御利益

私は，率直にいって，「クリスタルビームを生成し，それを世のため人のために役立てたい」などとは思っていない．ただ単に，イオンビームの結晶化という現象が物理的に興味深く好奇心を強くそそられたので，この研究に時間を割いているだけである．しかしながら，クリスタルビームが物理屋の自己満足の対象以上のものであることは明らかだと思う．実際それは，基本的な物性現象である以前にイオンビームである．

先に，現代社会の中で“ビーム”という道具が担っている役割の多様性や重要性について述べたが，クリスタルビームもその一部である．しかも，他のいかなるビームよりも高い品質を誇っているのである．クリスタルビームを越える高品質ビームを生成することは原理的に不可能であり，その意味でまさに“究極のイオンビーム”といえる．他のありふれたビームが多方面で役立てられている一方で，究極のビームが役に立たないなどということはありえない．クリスタルビームのエミッタンスはほぼゼロであり，したがってほとんど熱雑音がない．すべての粒子のエネルギーが高い精度で一致しているわけである．このようなイオンビームを欲しがっているユーザーはそこら中にいくらでもいるはずである．

ここで，クリスタルビームの可能な利用法を思いつく限り個条書きにするようなことはしない．そんなことをしてもほとんど無意味だからである．超高品質のイオンビームが手に入った場合に何ができるかは，それぞれの人がそれぞれの興味の中で考えればいいことであるし，またいまだ実現されたことのない究極のビームが将来どのような分野でどのように活用され得るかを正確に予言

することなど不可能である．

2章 ビーム軌道力学の基礎

この章では，3 章の内容を理解する上で必要なビーム軌道力学の基礎について解説する．

2.1 ベータトロン運動とシンクロトロン運動

ランダムに飛び交っている粒子を狭い空間の中に閉じ込めておくためには，当然外から何らかの力を加えなければならない．粒子が電荷をもっている場合は，この目的のため電磁気力を使うことができる．逆に，帯電していない粒子には電気的な力も磁気的な力も与えようがなく*，そのような粒子を人間が思いのままにコントロールするのは至難の業である．加速器が帯電した粒子のみしか扱うことができないのは，電磁気力に頼っているからである．自然界には，電磁相互作用より強力な“強い相互作用”というものが存在するが，これを加速器に用いるためのアイデアが提案された例は今のところない．

ビームがある特定の設計軌道から大きくはずれないようにするには，その軌道軸へ向けての集束力が必要である．例えば，原点から距離 x だけ離れた粒子に対して，その距離に比例した $-kx$（k は定数）という力が働くようにしてやればよい．これはバネの復元力と全く同じ性質のものである．したがってこの場合，バネの先端に固定された質点球の運動と同様，荷電粒子は設計軌道の周りで単振動を行うことになる．

粒子の進行方向に z 軸をとり，それに直交する平面上(横方向平面上)で水平方向に x 軸を，鉛直方向に y 軸を設定する．さらに，それぞれの自由度に線形の復元力を持ち込んだとしよう．このとき，各自由度間に何の相関も存在しなければ，粒子はそれぞれの方向で独立に振動する．例えば，水平方向の粒子運

* 中性粒子の磁気モーメントを利用する方法などが考えられるが，作用する力は微弱である．

動を記述する方程式は，設計軌道に沿って測った距離 s を独立変数に選ぶと

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}s^2} + \left(\frac{\nu_x}{R}\right)^2 x = 0 \tag{2.1}$$

と書ける．ν_x は，粒子が平均半径 R のリングを一周する間に x 方向に何回振動するかを表す重要なパラメータであり，水平方向の“チューン”と呼ばれる．y および z 方向に関しても全く同じ形の方程式が成り立つが，チューン（ν_y および ν_z）の値は一般に異なっている．このように，蓄積リング中の荷電粒子の運動方程式は，最も単純には，次のようなハミルトニアンから導くことができる：

$$H_s = \frac{1}{2}\left[p_x^2 + \left(\frac{\nu_x}{R}\right)^2 x^2\right] + \frac{1}{2}\left[p_y^2 + \left(\frac{\nu_y}{R}\right)^2 y^2\right] + \frac{1}{2}\left[p_z^2 + \left(\frac{\nu_z}{R}\right)^2 z^2\right] \tag{2.2}$$

因みに，横方向平面内の振動運動のことを“ベータトロン運動”，進行方向自由度の振動運動のことを“シンクロトロン運動”と称する．これに対応して，ν_x と ν_y をベータトロンチューン，ν_z をシンクロトロンチューンと呼ぶこともある．

2.2　強集束の原理

荷電粒子に対して線形の復元力を与える具体的手段について考えてみよう．結論からいうと，横方向平面内でのビーム発散を抑えるには，四重極場を用いればよい．もちろん，電気的な四重極場であっても磁気的な四重極場であっても構わないが，一般に前者は低エネルギー領域で，後者は高エネルギー領域で使用される．その理由はそれぞれの生み出すローレンツ力の形を考えてみればすぐに理解できる（磁気的なローレンツ力は荷電粒子の速度に比例するので，エネルギーの高い領域でより効率が上がる）．

四重極磁場は，図 2.1 のような四つの極をもった電磁石によって創ることができる．いま図 2.1 で，正の電荷をもつイオンが，紙面の向こう側から手前に向かって飛んで来たとしよう．このとき，イオンの感じるローレンツ力は図上の矢印の方向を向く．このベクトルのそれぞれの座標軸への射影を見れば明らかなように，イオンは鉛直方向の自由度に関しては原点に引きつけられ(集束)，逆に水平方向については原点から遠ざかる向きへ力を受ける(発散)．

磁場勾配 B_1 をもつ四重極磁石のベクトルポテンシャルは

$$\boldsymbol{A}_Q = \left(0,\ 0,\ \frac{1}{2}B_1(x^2 - y^2)\right) \tag{2.3}$$

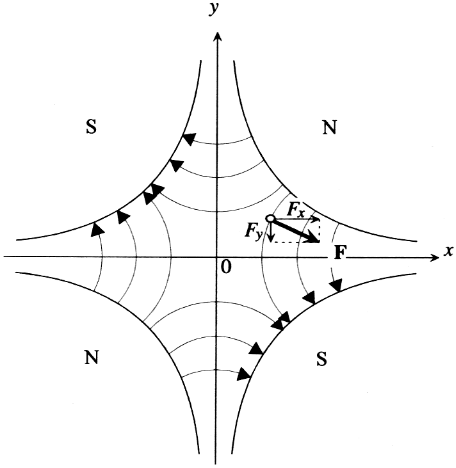


図 2.1　四重極磁場

のような形をしている．このとき磁束密度は $\boldsymbol{B}_Q = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}_Q = (-B_1 y,\ -B_1 x,\ 0)$ となる．イオンが z 軸方向に速度 v で走っているとすると，この磁場によるローレンツ力は $\boldsymbol{F}_Q = q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B} = (qvB_1 x,\ -qvB_1 y,\ 0)$ であり，確かに原点からの距離に比例した力となっている．しかしながら，x 成分と y 成分の符号が異なっているので，上で見たように，一自由度については集束力であるが，それに直交する自由度に関しては必ず発散的な力となる．このため，単純に考えると，四重極磁石ではうまくビームを集束することができないような気がしてしまう．

そこで登場するのが“強集束の原理”である．この原理は一言でいえば，「凸レンズ(集束)と凹レンズ(発散)をうまく組み合わせれば，全体として強い凸レンズの効果を得ることができる」というものである．極性の違う四重極レンズを例えば交互に並べると，水平と鉛直それぞれの方向について集束効果と発散効果が繰り返される状態になる．このとき，磁場勾配の大きさを適当に選べば，強集束の原理によって，結果的に両方の自由度で集束効果を得ることができるのである．現代加速器では，まず例外なく，この強集束の原理を使って横方向平面内でのビーム集束を達成している．

ところで，ビームは金属のパイプの中を飛んでいるので，横方向の発散は致命

的である（横方向の振動振幅が大きい粒子はパイプ壁に衝突して失われてしまう）．一方，設計軌道の方向には何の障害物も存在しないので，その軌道に沿って多数の荷電粒子を輸送するということだけを考えるなら，進行方向自由度のビーム集束は必要がない．つまり，式 (2.2) においてシンクロトロンチューン ν_z はゼロであってもよく，その場合粒子の進行方向運動は単なるドリフトとなる．もちろん，進行方向に関しても必要ならビームを集束させることができる．そのためには，例えば高周波空胴を用いる．高周波空胴はビームを加速する目的にも使用される．というわけで，高周波加速を受けたビームは結果的に連続的ではなくなってしまい，必ずいくつかの塊になって飛んでいる．この塊のことを“バンチ(bunch)”と呼ぶ．

強集束された粒子の運動は当然のことながら単純な調和振動ではない．粒子に作用する力は依然として線形ではあるが，軌道に沿って符号が変わるため，式 (2.1) よりも多少複雑な運動方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}s^2} + K_x(s)x = 0 \tag{2.4}$$

を考えなければならない．$K_x(s)$ は四重極磁石の配置によって決まる関数で，正の定数になったり負の定数になったり，あるいはまた（磁石の存在しない空間では）ゼロになったりする．蓄積リングのように設計軌道が閉じている場合には，周期関数となる．

数学的には，式 (2.1) の解と式 (2.4) の解はかなり異なった性質をもっている．すなわち，前者は常に安定である一方，後者には不安定領域が存在するのである．しかしながら，安定領域の内側では，式 (2.4) に支配された粒子運動と式 (2.1) による単振動との間に大きな物理的差はないことがわかる．実際，微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2\sqrt{\beta_x}}{\mathrm{d}s^2} + K_x(s)\sqrt{\beta_x} - \frac{1}{(\sqrt{\beta_x})^3} = 0 \tag{2.5}$$

を満足する周期関数 β_x（ベータトロン関数と呼ばれる）を導入し，これを用いて位相変数

$$\Psi = \frac{1}{\nu_x}\int_0^s \frac{\mathrm{d}s}{\beta_x(s)} \tag{2.6}$$

を定義する．このとき変換 $\hat{x} = x/\sqrt{\beta_x}$ を施すことにより，式 (2.4) が単振動の

方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2\hat{x}}{\mathrm{d}\Psi^2}+\nu_x^2\hat{x}=0 \tag{2.7}$$

に帰着することを示すことができる．より大雑把には，式 (2.4) に“平滑化近似 (smooth approximation)”を施したものが式 (2.1) であるともいえる．以上のように，式 (2.2) は理想的な加速器中の単粒子運動を記述するモデルとしてまずまず妥当なものであり，ビームの研究に際して頻繁に登場する．

2.3　粒子間相互作用

前節ではきわめて理想的な状況を考えたが，実際のビームには線形力だけではなく，様々な非線形力も同時に作用している．例えば，加速器には色収差と呼ばれる効果を補正するための六重極磁石や，場合によっては八重極磁石も導入される．また，双極磁石と四重極磁石だけしか存在しない場合でも，これらの磁石を人間が製作・設置する際の誤差が設計軌道上にありとあらゆる非線形要素を生み出す．このとき，調和振動子モデル (2.2) には数多くの非線形項が加わることになり，ビームの運動を複雑きわまりないものに変えてしまう．

さらに厄介なのは，個々の粒子がもつ電荷である．電荷は粒子の軌道を人為的に制御する上で欠くべからざるものであったわけだが，同時にビーム全体を不安定化する要因にもなりうる．例えば，ビームは常に真空パイプや高周波空胴などの金属に囲まれており，したがって粒子の電荷がこれら環境体の表面上に鏡像電荷を誘起してしまう．鏡像電荷はその周囲に 2 次的な電磁場を創り出し，それがビーム自身にはね返って悪さをする場合があるのである．このような不安定現象は“航跡場（wake field）効果”と呼ばれている．また，互いに反対方向に周回する 2 つのビームを衝突させる，いわゆるコライダー（衝突型加速器）の場合，一方のビームのもつ電荷によって他方のビームが強い影響を受けうる．これを“ビームビーム効果”と呼ぶ．これらの効果の解析は非常に複雑ではあるが，まともに動作する加速器を設計するためには避けて通れない．

言うまでもなく，単一のビーム内部でも個々の粒子は相互に作用を及ぼし合っている．結果として“空間電荷効果”と称される集団現象が発生する．航跡場効果やビームビーム効果はビーム物理特有の研究対象であろうが，空間電荷効果は明らかにプラズマ物理，とりわけ非中性プラズマの物理と密接に関係して

いる．ビームの相転移現象も広い意味で空間電荷効果の範疇に含めることができるだろう．

空間電荷効果を解析する上での基礎となる方程式系を導いておこう．簡単のため進行方向自由度の粒子運動は無視し，出発点として式 (2.2) に強集束の効果を加味したハミルトニアン

$$H_\perp = \frac{1}{2}\left[p_x^2 + K_x(s)x^2\right] + \frac{1}{2}\left[p_y^2 + K_y(s)y^2\right] \tag{2.8}$$

をとることにする．$K_y(s)$ は y 方向の集束効果を表す周期関数で，四重極磁石のみを考慮する場合は $K_y(s) = -K_x(s) = qB_1/p_0$ が成り立つ．粒子間相互作用を導入するには，上式に空間電荷のポテンシャル ϕ を加えてやればよい：

$$H_\perp = \frac{1}{2}\left[p_x^2 + K_x(s)x^2\right] + \frac{1}{2}\left[p_y^2 + K_y(s)y^2\right] + \frac{q}{p_0\beta_0 c\gamma_0^2}\phi(x, y; s) \tag{2.9}$$

ここに，c は光速度，β_0 および γ_0 は基準粒子に対するローレンツ因子（すなわち，ビームの重心速度を v_0 とするとき，$\beta_0 = v_0/c$，$\gamma_0 = 1/\sqrt{1-\beta_0^2}$），また p_0 は基準粒子の運動量である．ϕ は空間座標 (x, y) と独立変数 s の関数であり，粒子数密度 n をもつビームに対し，よい近似でポアソン方程式

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = -\frac{q}{\varepsilon_0}n(x, y; s) \tag{2.10}$$

を満たしている．位相空間分布関数が $f(x, y, p_x, p_y; s)$ で与えられる場合，n は f を全運動量空間で積分することによって決定できる：

$$n(x, y; s) = \iint f(x, y, p_x, p_y; s)\mathrm{d}p_x\mathrm{d}p_y \tag{2.11}$$

したがって，n を求めるためにはまず f を決定しなければならない．

一方，f は方程式

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s} = \left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)_{\mathrm{collision}} \tag{2.12}$$

の解であることが知られている．式 (2.12) の右辺は衝突項と呼ばれるもので，個別粒子間のクーロン衝突に起因した f の時間的変化率を表す．しかしながら前にも書いたが，この衝突効果は無視できる場合が多く，したがってビームが示す集団現象を理論的に取り扱う際しばしば

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s} = 0 \tag{2.13}$$

が仮定される．この方程式は無衝突ボルツマン方程式，あるいはブラソフ方程式と呼ばれている．因みに，1 章で議論したクーロン結合による横方向自由度の間接冷却効果は衝突項の存在によって生み出される．したがって，高温・希薄なため $(\partial f/\partial s)_{\mathrm{collision}} \approx 0$ が成り立つような一般のビームでは，間接冷却の効率はきわめて悪いことが予想される．

式 (2.12) は一見簡単な形をしているが，これがかなりの曲者である．実際，左辺の全微分を書き直すと

$$\frac{\partial f}{\partial s} + p_x \frac{\partial f}{\partial x} + p_y \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial H_\perp}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial p_x} - \frac{\partial H_\perp}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial p_y} = \left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)_{\mathrm{collision}} \tag{2.14}$$

が得られる．この式にはハミルトニアン $H_\perp$ が含まれているので，結局，式 (2.9)～(2.11) と (2.14) をセットにして初めて閉じた方程式系が得られることになる．つまり，空間電荷効果を数学的に解析するためには，これらの方程式を連立していっぺんに解かなければならないということである．が，それはほとんど無理な話である．

2.4　イオントラップ

以上の数学的議論では，ビームの重心運動が実質的にほとんど問題にされていないことがわかる．例えば，式 (2.2) や (2.8) を加速器ビームのモデルであると書いたが，式 (2.2) などは単なる調和振動子の和以外の何物でもない．式 (2.9) にしても，空間電荷のポテンシャルは近似的にポアソン方程式 (2.10) を満たしており，静的なイオン群を扱っているのと同じである．ビームの重心速度 β_0 が陽に入ってきてはいるが，これは単なるパラメータであり物理的な効果を生む要素とはなっていない．

ビームの運動エネルギーが増大すれば β_0 が 1 に近づく一方 γ_0 はどんどん大きくなり，式 (2.9) の右辺第三項は非常に小さくなる――空間電荷効果が無視できるようになる――が，これは単純な特殊相対論的効果である．つまり，「高速ビームの世界と人間の世界では時間の尺度が異なる」という事実が数学的に表現されているに過ぎない．結局，輻射の効果や航跡場効果などを無視する限り，重心系に乗り移ってビームを眺めれば，それは目の前で単に止まって見えるということである．したがって，高速ビームに見られるある種の集団現象は，加

速器にこだわらずとも，トラップ中の荷電粒子群の挙動を研究することによってより明確に理解することができるはずである[20]．

高周波四重極トラップ中で非相対論的に運動している質量 m の荷電粒子群は，独立変数を $\tau = ct$ (t は時間) とすると

$$H_{\mathrm{trap}} = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2} + \frac{1}{2}K(\tau)(x^2 - y^2) + \frac{q}{mc^2}\phi_{\mathrm{sc}}(x, y; \tau) \tag{2.15}$$

のようなハミルトニアンに支配されていることが示される．ここで $K(\tau)$ は高周波の周波数や電極電圧などに依存する周期関数であり，ポテンシャル関数 ϕ_{sc} はやはりポアソン方程式から求まる．式 (2.9) と (2.15) の類似性は明白である．実際，クリスタルビームの性質やその生成過程における問題点などについて考察する際，イオントラップ中のクーロン結晶に思いをはせることがプラスになる場合が多い．他方，このようなプラズマトラップを利用したビームの研究には限界があることも事実である．例えば，高エネルギー加速器中のビームは空間電荷効果よりもむしろ航跡場効果の影響を強く受けているので，トラップされた非中性プラズマをそのモデルとして利用することには無理がある．

2.5　運動量分散

ここまでは粒子に作用する人為的な力として四重極場による集束力のみを考えてきたが，実際の蓄積リングにはビームの軌道を湾曲させる双極磁場も存在している．以下で，この双極磁場がもたらす効果についてある程度定量的に議論してみたい．双極場はイオントラップには見られない蓄積リング特有のものであり，前述したように，クリスタルビームの生成をより難しくする一因となっている．

鉛直方向に磁束密度 B の一様な磁場があり，そこに質量 m のイオンが速度 $v(= \beta c)$ で水平に入射されたとする．このとき動径方向の運動方程式は，$\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ として

$$m\gamma\left(\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} - \frac{v^2}{r}\right) = -qvB \tag{2.16}$$

と書ける．設計運動量 p_0 をもつイオンの軌道曲率半径が式 (1.2) で与えられることに着目し，さらに独立変数を t から $s(= vt)$ へ変換すると，式 (2.16) はこ

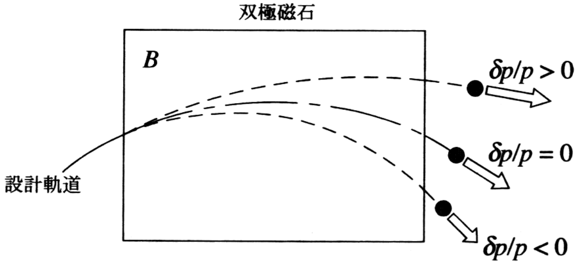


図 2.2　双極磁場の影響

の粒子の運動量 $p = m\beta\gamma c$ を使って

$$\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}s^2} = \frac{1}{r} - \frac{1}{\rho_0}\left(\frac{p_0}{p}\right) \tag{2.17}$$

のように変形することができる．

次に，このイオンの位置が設計軌道から水平方向に微小距離 x だけずれているものとして $r = \rho_0 + x$ とおく．これを式 (2.17) に代入した上で x について 1 次の項まで残すと

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}s^2} = -\frac{x}{\rho_0^2} + \frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\delta p}{p}\right) \tag{2.18}$$

が得られる．ここで，$\delta p/p \equiv (p - p_0)/p$ とした．イオンの運動量が設計値 p_0 に等しいとき（$\delta p/p = 0$ の場合），式 (2.18) の右辺第二項は消えてしまい，$1/\rho_0^2$ に比例する線形の集束力だけが残る．また，イオンの運動量が p_0 とは異なる場合，双極磁石に入射する直前まで設計軌道上を走っていたとしても，磁石を出るときには $\delta p/p$ の値に依存した軌道のずれが生じることになる（図 2.2）．

双極磁石による水平方向の集束効果と四重極磁石による集束効果を同時に考慮するため，関数 $K_x(s)$ を次のように再定義しよう：

$$K_x(s) = \frac{1}{\rho^2} - \frac{qB_1}{p_0} \tag{2.19}$$

ρ は s に依存する周期関数で，設計軌道の曲率半径を表している．すなわち，双極磁石中では $\rho = \rho_0$ となるが，それ以外の場所では $\rho = \infty$（したがって，右辺第一項はゼロ）である．同様に，右辺第二項は粒子が四重極磁石の中を通過しているときだけゼロとは異なる特定の値をとる．ところで，水平方向の双極場

は存在しないと仮定してよいので，$K_y(s)$ の定義は変更を受けないで済む．つまり，$K_y(s) = qB_1/p_0$ のままである．

式 (2.19) を用いると，式 (2.18) は

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}s^2} + K_x(s)x = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\delta p}{p}\right) \tag{2.20}$$

のように一般化される．$\delta p/p \neq 0$ の粒子は設計軌道とは異なる閉軌道 x_D を有するが，この x_D を運動量分散関数 $D(s)$ を使って $x_D = D(s)(\delta p/p)$ と書き表すことにする．$\delta p/p = 0$ の場合は $x_D = 0$，つまり閉軌道は設計軌道に一致する．式 (2.20) で $x = x_D$ とおくと，$D(s)$ の満たすべき方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2 D}{\mathrm{d}s^2} + K_x(s)D = \frac{1}{\rho} \tag{2.21}$$

が得られる．これで水平方向の粒子運動は運動量分散効果による閉軌道のずれ x_D とその周りのベータトロン運動 $\tilde{x}$ に分離されたことになる．実際，$x = \tilde{x} + x_D$ を式 (2.20) に代入した後式 (2.21) を用いれば，$\tilde{x}$ が式 (2.4) と全く同じ方程式を満足することが容易に証明される．

ビームが結晶化したとき，すべてのイオンに対して $\delta p/p = 0$ が成立するならば結果的に x_D を無視することができ，イオントラップと蓄積リングとの間に本質的な差はなくなる．しかしながら現実には，1 次元の紐状クリスタルビームと鉛直平面上の 2 次元クリスタルビームを除き，運動量分散の効果が消えることはない．

2.6　ハミルトニアンの導出

ハミルトニアンや運動量分散関数の導出を天下り的に行ってきたが，それでは納得しない読者のために，ビームの運動方程式をより厳密に導いてみることにする．数式が多少煩雑に見えるかもしれないが，必要な計算は非常に簡単である．

最小作用の原理から出発しよう：

$$\delta \int L_t \mathrm{d}t = 0 \tag{2.22}$$

粒子の位置ベクトルを $\boldsymbol{u}$，電磁場のベクトルポテンシャルを $\boldsymbol{A}$，スカラーポテ

ンシャルを ϕ と書くとき，ラグランジアン L_t は周知のように

$$L_t = -mc^2\sqrt{1-\left(\frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}\right)^2} + q\boldsymbol{A}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} - q\phi \tag{2.23}$$

で与えられる．式 (2.23) からハミルトニアンを導くことは容易であるが，前節までの議論に鑑み，まず時間 t よりもむしろ設計軌道に沿って測った距離 s を独立変数とすることを考える．実際，その方が何かと便利である．なぜならば，磁石の配置が変わらない限り，粒子は特定の座標 s で毎周回必ず同じ外場の影響を受けるからである．これに対し，個々の粒子がもつ運動量はそれぞれ異なっているため，リングを一周するのに要する時間はまちまちである．よって，時間 t を独立変数として採用すると，外力のポテンシャルは独立変数の周期関数とはならない．

以上のような理由から，式 (2.22) を

$$\delta\int L_s \mathrm{d}s = 0 \tag{2.24}$$

のように書き変える．新しいラグランジアン L_s は

$$L_s = -mc^2\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right)^2-\left(\frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}s}\right)^2} + q\boldsymbol{A}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}s} - q\phi\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} \tag{2.25}$$

である．軌道のねじれがない場合，位置ベクトル $\boldsymbol{u}$ の s 微分は

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}s} = \left(1+\frac{x}{\rho}\right)\boldsymbol{e}_s + \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{e}_x + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{e}_y \tag{2.26}$$

と書ける．ここで $\boldsymbol{e}_s$ は設計軌道の単位接線ベクトル，$\boldsymbol{e}_x$ と $\boldsymbol{e}_y$ はそれぞれ $\boldsymbol{e}_s$ に直交する水平および鉛直方向の単位ベクトルである(図 2.3)．また，ρ は式 (2.19) において導入された軌道曲率半径を表す周期関数，x と y は設計軌道軸を原点とする横方向平面上の水平および鉛直座標である．この曲線座標系に対応して，ベクトルポテンシャルの各成分を $A_x = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}_x$，$A_y = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}_y$，および $A_s = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}_s$ と書くことにすると，多重極磁石の効果を記述するためには A_s だけを考えれば十分であることが容易に示せる．また，粒子の横方向の運動量成分は設計軌道方向のそれに比べて圧倒的に小さいので，A_x や A_y に対する空間電荷からの寄与も無視して差し支えない．というわけで，$A_x = 0 = A_y$ とおくことができる．

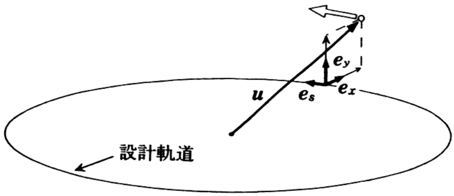


図 2.3　加速器の曲線座標系

双極磁石と四重極磁石のみを考慮すると，マクスウェル方程式より A_s として

$$A_s = -\frac{p_0}{2q}\left(1+\frac{x}{\rho}\right) + \frac{1}{2}B_1(x^2-y^2) + A_{\rm sc} \tag{2.27}$$

が得られる．右辺第一項は双極磁石からの寄与，第二項は四重極磁石からの寄与で，これらは同時には存在しないものとする．また，$A_{\rm sc}$ は空間電荷のベクトルポテンシャルで，荷電粒子群が高速運動しているために発生する磁場の効果を表している．粒子の進行方向自由度の速度分布が横方向平面上でほぼ一様と見なせる場合，近似的に $A_{\rm sc} \approx \beta_0\phi/c$ とおくことが可能である．

ハミルトニアンは L_s から求めることができ

$$H = -\left(1+\frac{x}{\rho}\right)\sqrt{\left(\frac{p_t+q\phi}{c}\right)^2 - m^2c^2 - p_x^2 - p_y^2} - q\left(1+\frac{x}{\rho}\right)A_s \tag{2.28}$$

となる．進行方向自由度の正準座標は時間 t，それに共役な運動量は $p_t = \partial L_s/\partial(\mathrm{d}t/\mathrm{d}s)$ である．いま全運動量を $p = \sqrt{(p_t+q\phi)^2/c^2 - m^2c^2}$ で定義し，p_x や p_y が p に比べてずっと小さいことに留意すれば，式 (2.28) は

$$H \approx -\left(1+\frac{x}{\rho}\right)\left(qA_s + p - \frac{p_x^2+p_y^2}{2p}\right) \tag{2.29}$$

と近似できることがわかる．また，粒子のもつ全エネルギーと設計エネルギーとの差 $\varDelta E$ を使うと，運動量のずれ $\delta p (\equiv p - p_0)$ は

$$\delta p \approx \frac{\varDelta E}{\beta_0 c} - \frac{1}{2p_0}\left(\frac{\varDelta E}{\beta_0 c\gamma_0}\right)^2 - \frac{q\phi}{\beta_0 c} \tag{2.30}$$

のように表現できる．式 (2.27) と (2.30) を式 (2.29) に適用し，低次の項だけを残すと

$$H = -p_0\left(1+\frac{x}{\rho}\right)\frac{\varDelta E}{p_0\beta_0 c} + \frac{p_0}{2\gamma_0^2}\left(\frac{\varDelta E}{p_0\beta_0 c}\right)^2 + \frac{p_x^2+p_y^2}{2p_0}$$

$$+\frac{p_0}{2}(K_x x^2 + K_y y^2) + \frac{q}{\beta_0 c \gamma_0^2}\phi \tag{2.31}$$

が得られる．K_x および K_y は §2.5 で定義された周期関数と同じものである．式 (2.31) では $(t, -\Delta E)$ を進行方向自由度の正準変数と見なすこともできる．

次に母関数[21)]

$$F(x, \hat{p}_x, y, \hat{p}_y, t, -\Delta\hat{E}) = \left(x - \frac{\Delta\hat{E}}{p_0\beta_0 c}D_{\rm sc}\right)\hat{p}_x + y\hat{p}_y - t\Delta\hat{E} + \frac{\Delta\hat{E}}{\beta_0 c}\frac{{\rm d}D_{\rm sc}}{{\rm d}s}x - \frac{p_0}{2}\left(\frac{\Delta\hat{E}}{p_0\beta_0 c}\right)^2 D_{\rm sc}\frac{{\rm d}D_{\rm sc}}{{\rm d}s} \tag{2.32}$$

を用いて，正準変数を $(x, p_x, y, p_y, t, -\Delta E)$ から $(\hat{x}, \hat{p}_x, \hat{y}, \hat{p}_y, \hat{t}, -\Delta\hat{E})$ へ変換してみる．ここで $D_{\rm sc}$ は s に依存する未知関数 $F_{\rm sc}$ を含んだ微分方程式

$$\frac{{\rm d}^2 D_{\rm sc}}{{\rm d}s^2} + K_x D_{\rm sc} = \frac{1}{\rho} + \frac{q}{p_0\beta_0 c\gamma_0^2}F_{\rm sc} \tag{2.33}$$

の解であるとする（$F_{\rm sc}$ の選び方は基本的に任意である）．この正準変換を式 (2.31) に施すと，新しいハミルトニアン[22)]

$$\tilde{H} = \frac{\tilde{p}_x^2 + \tilde{p}_y^2}{2} + \frac{1}{2}(K_x\tilde{x}^2 + K_y\tilde{y}^2) + \frac{q}{p_0\beta_0 c\gamma_0^2}\left(\tilde{\phi} + F_{\rm sc}\frac{\Delta\tilde{E}}{\beta_0 c}\tilde{x}\right) - \frac{\Delta\tilde{E}}{\beta_0 c} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\gamma_0^2} - \frac{D_{\rm sc}}{\rho} + \frac{q}{p_0\beta_0 c\gamma_0^2}F_{\rm sc}D_{\rm sc}\right)\left(\frac{\Delta\tilde{E}}{\beta_0 c}\right)^2 \tag{2.34}$$

が導かれる．ただし，$\tilde{\phi} = \phi(x = \tilde{x} + D_{\rm sc}\Delta\tilde{E}/\beta_0 c, y = \tilde{y}; s)$ であり，また正準変数は次のようにスケールされている：

$$\begin{array}{lll} \tilde{x} = \hat{x} & \tilde{y} = \hat{y} & \tilde{t} = \hat{t} \\ \tilde{p}_x = \hat{p}_x/p_0 & \tilde{p}_y = \hat{p}_y/p_0 & \Delta\tilde{E} = \Delta\hat{E}/p_0 \end{array} \tag{2.35}$$

ハミルトニアン (2.34) は $\tilde{t}$ を陽に含んでいないので，正準運動量 $\Delta\tilde{E}$ は運動の定数である．

双極磁石がない場合，すなわち線形のビーム輸送系では運動量分散は存在しないので $D_{\rm sc} = 0 = F_{\rm sc}$ である．このとき，式 (2.34) の最後の二項は横方向

自由度の運動とは明らかに無関係であり，ベータトロン運動のハミルトニアンは式 (2.9) で与えられることがわかる．また，空間電荷を無視する近似では式 (2.33) の右辺第二項は落とすことができるので，結局 $D_{\rm sc}$ は式 (2.21) の関数 D と全く同じものに帰着する．逆に式 (2.33) は，「高密度ビームでは空間電荷の影響によって運動量分散関数が変形してしまう」ことを示唆しているともいえる．水平方向の実空間座標 x は正準変数 $\tilde{x}$ と $x = \tilde{x} + D_{\rm sc}\Delta\tilde{E}/\beta_0 c$ のように結ばれているが，$\Delta\tilde{E}/\beta_0 c \approx \delta p/p$ なので，§2.5 で論じた閉軌道のずれとベータトロン振動の分離（$x = \tilde{x} + x_D$）が空間電荷を考慮した場合でも成立している．

3章 高速ビームの3次元レーザー冷却

2章で学んだ知識を踏まえ，蓄積リング中の高速イオンビームを3次元的にレーザー冷却する方法について考察する．以下では，大まかにいって，2つのポイントに的を絞って議論を進めることにする．ひとつは「横方向自由度の冷却効率を人為的に高めるにはどうすればよいか？」，もうひとつは「クリスタルビームを安定化するにはどうすればよいか？」である．

3.1 共鳴結合法

空間電荷効果の無視できる高温で密度の低いイオンビームを考える．このとき，ハミルトニアンは近似的に式 (2.2) のような3つの調和振動子の和で与えられる．いま速度に比例する散逸力を進行方向自由度に対してのみ人為的に加えたとしよう．散逸的な効果はハミルトン形式には直接とり込めないので，モデル化した運動方程式を書き下すことにすると

$$\text{横方向：}\quad \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}s^2} + \left(\frac{\nu_x}{R}\right)^2 x = 0, \qquad \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}s^2} + \left(\frac{\nu_y}{R}\right)^2 y = 0 \tag{3.1}$$

$$\text{進行方向：}\quad \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}s^2} + \left(\frac{\nu_z}{R}\right)^2 z = -\frac{2\lambda}{R}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s} \tag{3.2}$$

となる．ここで $\lambda(>0)$ は摩擦係数である．

式 (3.2) の解として $\exp(\kappa s/R)$ に比例するものを考えると，定数 κ の満たす代数方程式

$$\kappa^2 + 2\lambda\kappa + \nu_z^2 = 0 \tag{3.3}$$

が得られる．式 (3.3) の解は $\kappa = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \nu_z^2}$ であるから，進行方向自由度の運動は時間とともに減衰していく．$\lambda < \nu_z$ のとき，その減衰率は λ である．ところが，式 (3.1) から明らかなように，シンクロトロン振動の減衰が横方向自

由度に反映されることは決してなく，ベータトロン振動の振幅は全く変化しない．換言すれば，進行方向自由度のみを冷却しても，横方向自由度の温度は下がらないということである．

結局のところ，直接冷却される自由度とそれ以外の自由度との間に相関がないことが問題なのである．そこで，式 (2.2) に積 xz に比例するポテンシャルを新たに付け加えてみる．とりあえず y 方向の運動は無視することにし，ハミルトニアンとして

$$H_s' = \frac{1}{2}\left[p_x^2 + \left(\frac{\nu_x}{R}\right)^2 x^2\right] + \frac{1}{2}\left[p_z^2 + \left(\frac{\nu_z}{R}\right)^2 z^2\right] + \Gamma xz\delta_p(s) \tag{3.4}$$

を考える．Γ は x-z 結合の強さを表す定数，$\delta_p(s)$ はリングの周長 $2\pi R$ を周期とする周期的デルタ関数(すなわち $\delta_p(s) = \delta_p(s + 2\pi R)$)である．

上式で結合ポテンシャルに $\delta_p(s)$ を乗じたのは現実的な状況を想定したからにほかならない．つまり，このような人為的なポテンシャルは所定の電磁場を発生させる何らかのデバイスの形で蓄積リング上のある場所に導入されるため，粒子は毎周回その位置を通過するときだけ結合ポテンシャルの影響を受けるからである．デバイスの長さは当然有限ではあるがリングの周長に比べてずっと短いのが普通なので，上式のようなデルタ関数近似が成立するというわけである．

ハミルトニアン (3.4) に支配されている荷電粒子の進行方向自由度に散逸を与えると，運動方程式

$$\text{横方向：}\quad \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}s^2} + \left(\frac{\nu_x}{R}\right)^2 x = -\Gamma z\delta_p(s) \tag{3.5}$$

$$\text{進行方向：}\quad \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}s^2} + \left(\frac{\nu_z}{R}\right)^2 z = -\Gamma x\delta_p(s) - \frac{2\lambda}{R}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s} \tag{3.6}$$

が導かれる．x の運動方程式には z が，逆に z に関する運動方程式には x が入っているので，シンクロトロン振動の減衰はベータトロン振動に何らかの影響を与えうると期待される．事実，線形の差共鳴条件

$$\nu_x - \nu_z = \text{整数} \tag{3.7}$$

が満たされているとき，結合定数 Γ を適当な大きさに選ぶことによって，ベータトロン振動をシンクロトロン振動とほぼ同じ割合で減衰させることができる

のである．y 方向の振動運動を同様の方法で減衰させるためには，例えば xy に比例する結合ポテンシャルを導入した上で，共鳴条件

$$\nu_x - \nu_y = \text{整数} \tag{3.8}$$

を課せばよい．

詳しい理論的解析によって，以下のことがわかっている[8,9]：3 つの自由度が完全に独立している場合，シンクロトロン振動の減衰率が λ で与えられるのに対し，ベータトロン振動の減衰率は常にゼロである．一方，三自由度間に局所的な線形結合が存在する場合，共鳴条件 (3.7) と (3.8) が満足されていれば，すべての自由度の減衰率を同時におよそ $\lambda/3$ とすることができる．ただし，結合定数の大きさには最適値が存在する．つまり，パラメータが最適化されていない場合は，たとえ共鳴条件が満たされていたとしても，各自由度の減衰率を均等化することはできない．

最後に，結合源の局在性が実際問題として重要な意味をもっているという事実を指摘しておく．もし式 (3.4) の結合ポテンシャルをリング一周にわたって平均し，デルタ関数的な依存性を取り除いてしまったらどうなるか？ x-z 結合自体は消えないので問題はないように思えるが，共鳴条件に変化が生じる．すなわち，式 (3.7) の右辺の値としては 0 だけが許され，一般の整数では共鳴が起こらなくなってしまうのである．このことは，周期的デルタ関数が

$$\delta_p(s) = \frac{1}{2\pi R} + \frac{1}{\pi R}\sum_{\ell=1}^{\infty}\cos\left(\ell\frac{s}{R}\right) \tag{3.9}$$

のようにフーリエ展開できることからも理解できる．

式 (3.7) の右辺がどんな整数でも構わないのは，それぞれの共鳴に対し上式中のハーモニックスのうち特定のひとつだけが関与しているからである．一周平均をとってしまうと生き残るのは定数項(右辺第一項)のみとなり，この場合 $\nu_x \approx \nu_z$ のとき以外では共鳴は発生しない．通常シンクロトロンチューン ν_z はゼロに近い小さな値しかとらないため，ベータトロンチューン ν_x を同程度の大きさに設定するのは横方向自由度のビーム安定性を考えると非現実的である．したがって，式 (3.7) の右辺は一般に少なくとも 1 以上の正数となる．

3.2 運動量分散を利用した共鳴結合法

蓄積リングに人為的な線形結合源を導入するための簡単かつ具体的な方法が2つ提案されている．ひとつは，双極磁石による運動量分散の効果を積極的に利用する方法[9]で，もうひとつは“結合高周波空胴”と呼ばれる特殊な共振器を用いる方法[8]である．この節では，まず前者について説明する．

蓄積リング上のある場所に空胴共振器を設置する．空胴共振器とは一言でいえば金属の箱のことであり，その中に特定の周波数をもつ様々なモードの電磁定在波をたてることができる．この共振器を使って，ベクトルポテンシャルがビームの軌道軸周辺で

$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{RF}} = \left(0,\ 0,\ \frac{V_b}{\omega}\cos(\omega t + \varphi_b)\delta_p(s - s_b)\right) \tag{3.10}$$

のように表される角周波数 ω の定在波を励振したとしよう．ここで，V_b は高周波電圧の振幅，φ_b は初期位相定数，また s_b は共振器が置かれている場所の座標である．この種の共振器はどこにでもあるきわめてありふれたもので，ビームを加速したり進行方向にバンチしたりする目的のため頻繁に利用されている．

式 (2.27) にポテンシャル (3.10) を付加した上で§2.6の計算を繰り返すと，最終的なハミルトニアンは

$$\begin{aligned}\tilde{H} = {} & \frac{1}{2}(\tilde{p}_x^2 + K_x\tilde{x}^2) - \frac{\Delta\tilde{E}}{\beta_0 c} + \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta\tilde{E}}{\beta_0 c}\right)^2\left(\frac{1}{\gamma_0^2} - \frac{D}{\rho}\right) \\ & - \frac{qV_b}{p_0\omega}\cos\left[\omega\tilde{t} - \frac{\omega}{\beta_0 c}\left(D\tilde{p}_x - \frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}s}\tilde{x}\right) + \varphi_b\right]\delta_p(s - s_b)\end{aligned} \tag{3.11}$$

となる．ただし上式では，y 方向の運動と空間電荷の影響を無視してある．$\tilde{t}$ の代わりに基準粒子に対する相対時間 $\Delta\tilde{t} = \tilde{t} - s/\beta_0 c$ を正準座標と見なすこともでき，その場合ハミルトニアンは

$$\begin{aligned}\tilde{H}' = {} & \frac{1}{2}(\tilde{p}_x^2 + K_x\tilde{x}^2) + \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta\tilde{E}}{\beta_0 c}\right)^2\left(\frac{1}{\gamma_0^2} - \frac{D}{\rho}\right) \\ & - \frac{qV_b}{p_0\omega}\cos\left[\omega\Delta\tilde{t} - \frac{\omega}{\beta_0 c}\left(D\tilde{p}_x - \frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}s}\tilde{x}\right)\right]\delta_p(s - s_b)\end{aligned} \tag{3.12}$$

のように多少簡単化される．なお，高周波の初期位相は $\varphi_b + \omega s_b/\beta_0 c = 2\pi$ となるように選んだ．

式 (3.12) の右辺第三項，すなわち高周波場の導入によって生じたポテンシャルに注目して欲しい．余弦関数をべき級数展開すればわかるように，このポテンシャルは運動量分散関数 D とその微分係数 $\mathrm{d}D/\mathrm{d}s$ が座標 $s = s_b$ において同時にゼロとなることがない限り，必ず積 $\tilde{x}\Delta\tilde{t}$ あるいは $\tilde{p}_x\Delta\tilde{t}$ に比例する線形結合項を含む．つまり，運動量分散のある場所に高周波電磁場を持ち込むだけで，自動的に進行方向自由度と水平方向自由度との間に相関を与えることができるのである．

ポテンシャル (3.10) は，運動量分散を通じて，進行方向運動と水平方向運動を結合させることがわかった．が，鉛直方向の運動は依然として独立のままである．鉛直方向自由度を進行方向自由度と関連づける手段はいくつか考えられるが，“スキュー四重極磁石（skew quadrupole magnet）”を用いるのが最も手っ取り早い（ソレノイドを用いる方法も簡単である）．スキュー四重極磁石とは，普通の四重極磁石を軸の周りに回転させただけのものである．回転角を 45 度にすれば，積 xy に比例したベクトルポテンシャルが得られる．かくして，鉛直方向自由度は水平方向自由度と直接結合し，進行方向自由度と間接的に結びつく．（スキュー四重極場は鉛直方向の運動量分散を生むので，これを通して鉛直方向自由度と進行方向自由度が直接結合したとも解釈できる．）

運動量分散に基づく結合によって横方向自由度の冷却効率がどのように改善されるかを見てみよう．まず，ハミルトニアンを線形近似し，個々のエレメント（空胴共振器やスキュー四重極磁石など）を通過した際に粒子が受ける効果をそれぞれ行列表示する．例えば，長さ L の自由空間を表す変換行列は（簡単のため 1 次元運動を考えると）

$$\boldsymbol{M}_0 = \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.13}$$

で与えられる．実際，この自由空間の入り口と出口における正準座標をそれぞれ $\boldsymbol{x}_0 = (\tilde{x}_0, \tilde{p}_{x0})$ および $\boldsymbol{x}_1 = (\tilde{x}_1, \tilde{p}_{x1})$ とすると，$\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{M}_0\boldsymbol{x}_0$ が成り立つ．他のエレメントに関する変換行列も同様に定義し，それらを順々に掛け合わせて，リング一周分の転送行列 $\boldsymbol{M}_T$ を構成する．また，レーザー冷却モデルとして前節同様速度に比例した進行方向の散逸力を考え，その効果も行列 $\boldsymbol{M}_C$ を使って表

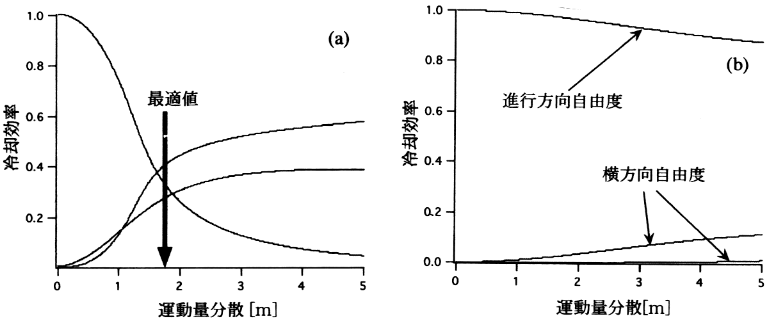


図 3.1　転送行列の固有値から計算された三自由度の冷却効率曲線

縦軸は冷却効率，横軸は空胴共振器が設置されている場所($s = s_b$)における運動量分散関数 D の値を表している．進行方向自由度の最大冷却効率，すなわち結合がない場合の効率を 1 として規格化してある．チューンの値は，(a): $(\nu_x, \nu_y, \nu_z) = (2.1, 2.1, 0.1)$，(b): $(\nu_x, \nu_y, \nu_z) = (2.13, 2.15, 0.1)$ である．

現する．こうして，冷却効果の加味された 6 行 6 列の一周行列 $\boldsymbol{M}_T\boldsymbol{M}_C(\equiv \boldsymbol{M})$ が求まる．各自由度における振動運動の減衰率はこの行列 $\boldsymbol{M}$ の固有値から計算することができる[9)]．

このような近似的手法によって求められた冷却効率曲線を図 3.1 に示す．この例では周長 40 m のリングが仮定されており，スキュー四重極磁石（軸長を L_q とする）の結合定数 $\Gamma_q(\equiv RL_qB_1/B\rho)$ は 0.1 としてある．図 3.1(a) はチューンの値を $(\nu_x, \nu_y, \nu_z) = (2.1, 2.1, 0.1)$ に設定した場合で，共鳴条件 (3.7) と (3.8) が完全に満たされている際の典型的な冷却効率曲線を表している．共振器を設置した地点における運動量分散関数 D の値が 1.5〜2 m 程度のとき，すべての自由度がほぼ等しい冷却効率を有することがわかる．ただし，この運動量分散の最適値は Γ_q の値を変えることによって，広い範囲で調整可能である．

最適領域における冷却効率が最大冷却効率，つまり結合ポテンシャルがない場合のシンクロトロン運動に対する冷却効率のおよそ 3 分の 1 であることも見てとれる．D が大きくなれば結合定数も大きくなるわけだが，強い結合が必ずしも高い冷却効率にはつながらないことに注意しよう．一方，チューンをわずかにずらして $(\nu_x, \nu_y, \nu_z) = (2.13, 2.15, 0.1)$ したときの結果が図 3.1(b) である．共鳴条件が完璧に満たされている場合に比べると，横方向自由度の冷却効率は大きく低下している．

3.3　特殊な空胴共振器による共鳴結合法

世の中のビーム蓄積リングは大抵空胴共振器を備えており，そのベクトルポテンシャルは近似的に式 (3.10) で表される．また，チューンを調整するのは容易である．したがって，運動量分散効果に基づいた共鳴結合法を使う限り，3次元レーザー冷却の実現という目的だけのためにとりたてて何か新しい道具を必要とすることはない．他方，そこまで簡単便利ではないが，“結合高周波空胴”という特殊な共振器を用いる別のスキームも提案されている．

普通の加速空胴と結合高周波空胴との本質的な差は使用する定在波のモードにある．最も単純な例として，断面の幅が $2d_x$，高さが $2d_y$ の箱形の共振器を考えてみよう．この共振器の $\mathbf{TM}_{210}$ モードに対応するベクトルポテンシャルは，電場の最大振幅を V_c とするとき

$$\boldsymbol{A}_c = \left(0,\ 0,\ \frac{V_c}{\omega_c}\sin\left(\frac{\pi x}{d_x}\right)\cos\left(\frac{\pi y}{2d_y}\right)\sin(\omega_c t)\right) \tag{3.14}$$

と書ける．ただし，共振周波数 ω_c は関係式

$$\frac{1}{d_x^2} + \frac{1}{(2d_y)^2} = \left(\frac{\omega_c}{\pi c}\right)^2 \tag{3.15}$$

を満たしている．式 (3.14) より，$\boldsymbol{A}_c$ の進行方向成分はビームの軌道軸付近で x に比例することがわかる．つまり，進行方向の電界強度が水平方向の座標変数に依存することになり，横方向自由度の冷却に必要な線形結合が得られたわけである．

通常の加速空胴とともに，結合高周波空胴を $s = s_c$ の地点に設置したとすると，ハミルトニアン (3.12) には次のような新しい項がひとつ加わることになる[8)]：

$$-\varGamma_c\left(\tilde{x} + \frac{\Delta\tilde{E}}{\beta_0 c}D\right)\sin\left[\omega_c\Delta\tilde{t} - \frac{\omega_c}{\beta_0 c}\left(D\tilde{p}_x - \frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}s}\tilde{x}\right)\right]\delta_p(s - s_c) \tag{3.16}$$

$\varGamma_c$ は結合定数で，結合高周波空胴の仕様によって決まる．

結合高周波空胴を用いる冷却スキームにはいくつかの特徴がある．まず，当然のことながら運動量分散を必要としない．式 (3.16) で $D = 0$ とおいたとしてもポテンシャルの形は $-\varGamma_c\tilde{x}\sin(\omega_c\Delta\tilde{t})$ であり，依然結合は残る．そもそも運

動量分散関数はチューンを変えると不可避的に変化するので，結合の強さを調整するためのプローブは別にあった方が都合がよい．Γ_c は運動量分散とは全く無関係であり，共振周波数 ω_c や定在波の振幅 V_c などを変えることによって簡単に調整できるので何かと便利である．また，このスキームではポテンシャル (3.16) による結合だけでなく，通常の加速空胴における運動量分散結合（すなわち，式 (3.12) の右辺第三項）も同時に存在するので，横方向自由度の冷却効率をより高めることが可能である．さらに，結合高周波空胴全体を軌道軸の周りに 90 度回転させて使用すれば，スキュー四重極磁石の代わりとして，鉛直方向自由度と進行方向自由度の直接的な結合源としても働く．

結合高周波空胴を設計する際の注意点をいくつか挙げておこう．まず，この特殊な空胴によって不必要な非線形効果が強調されるのを避けるため，ω_c は通常型加速空胴の共振周波数 ω と同程度か，あるいは低めに設定した方がよい．例えば，単に $\omega_c = \omega$ とするのがよかろう．この場合，式 (3.14) で仮定されている単純な箱形共振器は，結合高周波空胴としては不適当であることがすぐにわかる．

レーザー冷却されているイオンビームの運動エネルギーは数 MeV ぐらいであるが，このとき諸種の条件から ω_c はせいぜい 100 MHz 以下のオーダーとなる．仮に $\omega_c = 100$ MHz としたとしても，式 (3.15) から共振器のサイズは 1 m を越えてしまう．よって，共振器のコンパクト化を図るには，何らかの細工が必要である．

要するに，進行方向の電場成分が x に比例するような高周波ポテンシャルを実現すればよいわけであるが，この目的に適う共振器として，例えば図 3.2 のような構造を考えることができる．この装置では，2 つの電極に直接高周波電圧を印可することによって軌道軸付近に必要なポテンシャルを発生させる．この空胴を通過する際にイオンが受ける効果を積分すると，実際に進行方向の電場強度が横方向の実空間座標に比例して変化することが示せる[23)]．このような共振器は，数 MHz の周波数帯で利用したとしても，20〜30 cm 程度の大きさにしかならない．

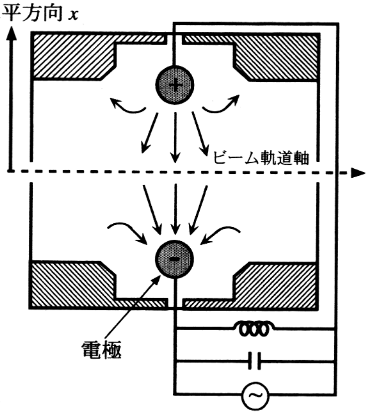


図 3.2　結合高周波空胴の模式図

3.4　シミュレーション例

共鳴結合法の有効性を確認するため，シミュレーション計算の結果をいくつか見てみることにしよう．ここで披露する結果は，“SAD[24)]” および “SOLID[25)]” と呼ばれるコードを用いて得られたものである．SAD は高エネルギー加速器研究機構で生出勝宣を中心に開発された粒子追跡コードで，加速器の設計研究に広く応用されている．ただし，粒子間のクーロン相互作用を精密に計算するルーチンは入っていないので，クリスタルビームの生成過程をシミュレートすることは現在のところ不可能である．

一方，SOLID はリー（X.-P. Li）によって書かれた分子動力学コードであり，その後ウェイ（J. Wei）や木原崇博によって改良が加えられている．このコードはクーロン場による長距離効果および短距離効果の両方が解析でき，ビーム相転移現象の系統的研究には不可欠である．しかしながら，高速のコンピュータをもってしてもきわめて長い計算時間を要するという難がある．このため，熱い初期ビームの冷却過程を調べる目的には主に SAD を使い，低温領域におけるビームの振る舞いを観るのには SOLID を用いるのが理にかなっている．なお，これらのコードでは蓄積リングのラティス構造を具体的に考慮した計算を行うことができる．

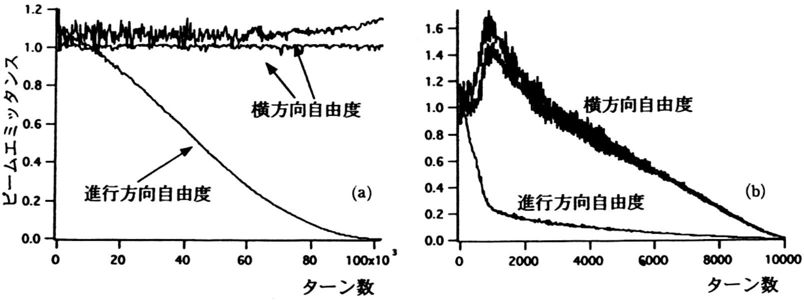


図 3.3　SAD によるシミュレーション計算の結果

縦軸は初期値で規格化された 2 乗平均エミッタンス，横軸はビームの蓄積リング周回数である．ASTRID のラティス構造が具体的に考慮されている．冷却イオンは運動エネルギー 100 keV の $^{24}Mg^+$ である．(a) の結果は，ASTRID でレーザー冷却実験を行う際に通常使用される非共鳴的なパラメータ設定に基づいて得られたものである．一方，(b) はベータトロンチューンとシンクロトロンチューンが共鳴条件 (3.7) および (3.8) をほぼ満足している場合のシミュレーション例である．

図 3.3 は SAD によるシミュレーション計算の一例で，ASTRID のラティス構造が仮定されている．ASTRID は周長 40 m の正方形をした蓄積リングで，それぞれの辺に四台の四重極電磁石を備えている (図 1.5)．双極電磁石中の軌道曲率半径は 6.37 m である．最近では主に運動エネルギー 100 keV の $^{24}Mg^+$ ビームのレーザー冷却実験が行われており，その際ベータトロンチューンの値は $(\nu_x, \nu_y) = (2.29, 2.73)$ 前後に設定される．図 3.3(a) のシミュレーションでは，これらの条件に加え，ビームをバンチするためごく普通の空胴共振器が一台考慮されている．高周波電場の電圧振幅は 10 V，共振周波数は 578 kHz で，このときシンクロトロンチューンは 0.01 のオーダーとなる．この共振器は §3.2 で解説したメカニズムに基づいて結合を生むが，共鳴条件が全く満足されていないため，横方向自由度には何の冷却効果も現れていない．

一方，四重極磁石の磁場勾配を調節してベータトロンチューンを $(\nu_x, \nu_y) = (3.11, 3.09)$ とした場合のシミュレーション結果が図 3.3(b) である．共振器の設置地点における運動量分散の値は (a) のケースに比べてやや減少するものの依然として 2 m 以上あり，水平方向自由度と進行方向自由度との間には十分な相関が存在している．シンクロトロンチューンは 0.1 に合わせてあり，また鉛直方向自由度の冷却効率を上げるためスキュー四重極磁石を一台導入してある．この “共鳴的な” セッティングの下では，進行方向自由度を冷却するだけで横

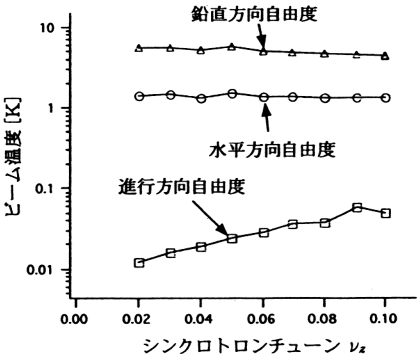


図 3.4　SOLID によるシミュレーション計算の結果(その一)

シンクロトロンチューン ν_z の値を少しずつ変えてその都度分子動力学シミュレーションを行ったもので，それぞれの ν_z に対して得られた最終的なビーム温度がプロットされている．高周波電圧の大きさを除き，図 3.3(b) の SAD シミュレーションで用いられたものと全く同じ ASTRID のラティスパラメータが仮定されている．

方向自由度の高速冷却も同時に達成できることがわかる．

図 3.3 のシミュレーションでは結合高周波空胴は考慮されていないが，仮に考慮したとしても，共鳴条件がほぼ満足されている限り結果は似たようなものになる．結合高周波空胴の効力がクローズアップされてくるのは，チューンが共鳴条件から大きくずれている場合である．運動量分散による結合のみしか存在しない場合には，共鳴条件 (3.7) の破れがより端的に横方向自由度の冷却効率の低下につながる．結合高周波空胴を励振すれば，この冷却効率の共鳴条件依存性をかなり抑えることができる[23)]．

上で触れたように，SAD の計算には粒子間相互作用が入らないので，図 3.3 の結果は低温領域での信頼性に欠ける．この点を補い，かつ共鳴結合法に基づいてイオンビームの相転移が実際に実現できるかどうかを調べるためには，分子動力学コードの助けを借りる必要がある．図 3.4 は SOLID によって得られた結果の一例である．使用されたパラメータやラティス構造は基本的に図 3.3(b) で仮定されているものと全く同じであるが，平衡温度の ν_z に対する依存性をチェックするため，高周波の電圧振幅だけを少しずつ変化させている．リングに蓄積されている $^{24}Mg^+$ イオンの総数は 26000 個で，ビーム強度としてはかなり低いものが想定されている．また，計算時間をセーブする必要上，初期の

ビーム温度は数百Kのレベルに抑えてある．

この図3.4でまず目につくのは，横方向自由度の最終温度として現実の実験結果より二桁以上も低い1〜10Kが達成されているという点である．他方，進行方向自由度と横方向自由度との間には依然不可解な温度不均衡が残っている．最終的なビーム温度が ν_z にほとんど依存していないという事実も注目に値する．ベータトロンチューンは $(\nu_x, \nu_y) = (3.11, 3.09)$ に設定されているわけだから，理論的には横方向自由度の冷却効率は $\nu_z \approx 0.1$ のとき最大となるはずである．実際，このシミュレーションでも，ベータトロン運動の減衰率は ν_z が0.1に近いときほど高くなることが確認されている．逆に，例えば $\nu_z = 0.02$ とすると，横方向自由度の冷却効率がきわめて悪くなるため，ビームが定常的な状態に至るまでの時間がかなり長くなってしまう．

このような事情があるにもかかわらず，到達可能なビーム温度という観点だけからすれば，冷却効率の良し悪しが本質的には問題となっていないわけである．これは，効率が多少落ちてもそれが厳密にゼロとならない限り，進行方向自由度を冷却し続けることによって，いずれ横方向自由度の温度も限界まで下がってしまうという当然のことを示唆している．ただし，冷却過程の進行に伴ってビーム密度が上昇すると，運動量分散の生み出す結合の存在もさることながら，むしろクーロン結合による間接冷却の効果が支配的になるものと予想され

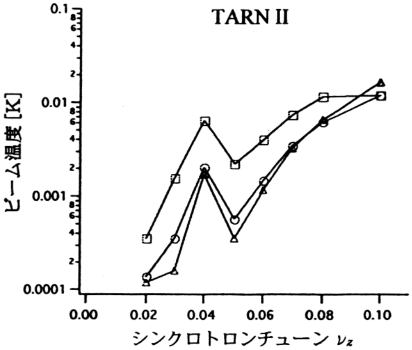


図 3.5　SOLIDによるシミュレーション計算の結果(その二)

蓄積リング"TARN II"のラティスパラメータを想定した分子動力学シミュレーションの結果である．ASTRIDのラティスに基づいた図3.4の結果とは異なり，横方向自由度の平衡ビーム温度が進行方向自由度のそれと同じレベルまで下がっていることがわかる．

表 3.1　TARN II のラティスパラメータ

周長 ($2\pi R$)	77.7 m
ベータトロンチューン (ν_x, ν_y)	(2.096, 2.104)
双極磁石中の軌道曲率半径 ρ_0	4.01 m
スキュー四重極磁石の結合定数 Γ_q	0.0124
ラティス周期数 N_ℓ	6
トランジションエネルギー γ_T	2.258
加速空胴の共振周波数	36.3 MHz

る.（この点については後述する.）

ASTRID の代わりに TARN II[26)] のラティス構造を仮定して，上と同様の分子動力学シミュレーションを行ってみた結果が図 3.5 である．使用した主なパラメータは表 3.1 にまとめてある．冷却イオンとして再び $^{24}Mg^+$ を考えているが，運動エネルギーは 1 MeV に上げてある．図 3.5 は ASTRID のラティスに対して得られた結果と明らかに異なる傾向を示している．図 3.4 で見られた温度不均衡は解消され，横方向自由度のビーム温度は最終的に進行方向自由度のそれと同じオーダーまで下がっている．三自由度の温度がいずれも mK のレベルに到達していることから，すでにビームの物性に質的な変化が現れていることが期待される．図 3.6 は冷却完了後の平衡状態における $^{24}Mg^+$ イオンの実空間分布をプロットしたものであるが，その配置に強い規則性が現れている．ASTRID や TSR のラティスを仮定したシミュレーションで，このような規則正しい 3 次元的イオン分布が実現できた例は今のところ知られていない．その理由は § 3.7 で明らかにする．

3.5　共鳴結合法の利点と問題点

共鳴結合法のセールスポイントは何といってもその簡便さであろう．とりわけ，運動量分散効果を用いるスキームには新たな技術的開発要素が全く存在しない．よって，少なくとも原理的には，既存の蓄積リングを使って今すぐにでもこのアイデアの検証実験を行うことができる．実際，TSR や ASTRID には高周波共振器がすでに設置されており，しかも運動量分散関数はリング上の至る所で有限の値をとっている．これは「シンクロトロンチューンとベータトロ

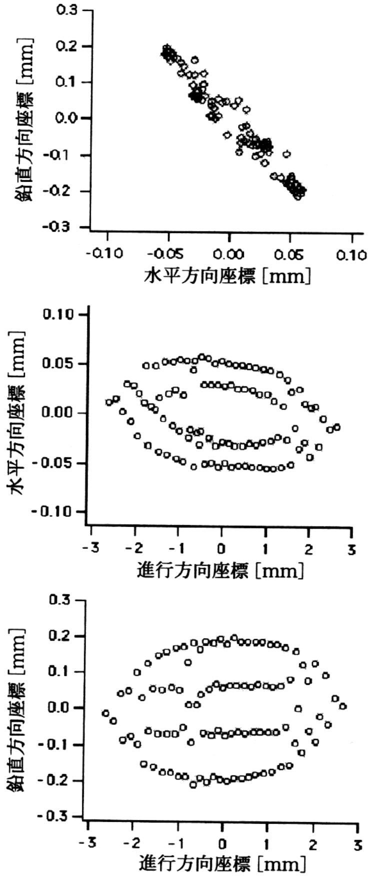


図 3.6　SOLID によるシミュレーション計算の結果(その三)

TARN II で共鳴結合法を使って冷却された 1 MeV の $^{24}Mg^{+}$ イオン群の実空間分布を表している．

ンチューンが共鳴条件 (3.7) を満たすよう，高周波電圧や四重極磁石の磁場勾配 B_1 を調整するだけで，必要な準備がすべて整ってしまう」ことを意味する．たったこれだけのことで横方向自由度のレーザー冷却効率を飛躍的に増大させることができるはずなのである．

前述したように，条件 (3.7) と (3.8) が同時に満たされている理想的な状況下では，すべての自由度の冷却効率を進行方向自由度に対する最大冷却効率の約

3分の1とすることができる．進行方向運動のレーザー冷却時間は，イオンエネルギーのばらつき具合にもよるが，普通0.1秒よりもずっと短い．よって，理論的には，横方向自由度の冷却時間も同じオーダーまで短縮することが可能である．言うまでもなく，クーロン結合による間接冷却効果に頼っていたのでは，とてもこのような高速冷却は望めない．

共鳴結合法が高温かつ希薄な初期ビームに対して特に高い有効性をもつという点も本質的に重要である．この方法は1次元構造から3次元構造まで，あらゆるタイプのクーロン結晶の生成に際し威力を発揮する．また三自由度間の結合の度合いを人為的に調節できるので，冷却過程のコントロールが可能である．

これら大きな利点を有する一方で，共鳴結合法には「進行方向にバンチしたビームに対してしか適用できない」という欠点がある．例えば，§3.2で解説した方法は一般的な加速空胴における結合を利用しているので，ビームは必然的にバンチされてしまう．§3.3の結合高周波空胴を用いる冷却スキームも，基本的に個々のイオンがシンクロトロン振動していなければうまく働かない．仮に連続的なビームを考えたとすると $\nu_z = 0$ であるが，このとき式(3.7)と(3.8)は効率のよい3次元冷却を実現するための必要条件として“$\nu_x \approx$ 整数”および“$\nu_y \approx$ 整数”を要求する．これらの条件は整数共鳴条件と呼ばれ，きわめて都合の悪いものである．実際，ベータトロンチューンが整数に近い値をもつ蓄積リング中のビームは不安定であり，冷却うんぬん以前の問題である．このように共鳴結合法で実現可能なのはクリスタルボールのみであり，トーラス状のクリスタルビームは生成できない．

共鳴結合法の実験的検証がTSRやASTRIDでいまだに行われていない理由も式(3.7)に関係がある．これらのリングはいずれも高周波空胴を備えているので，ビームをバンチさせること自体は簡単にできる．ただし，整数共鳴の禁止帯を回避しつつ条件(3.7)および(3.8)を成立させるため，シンクロトロンチューン ν_z はできるだけ大きく設定しなければならない．例えば，TSRでは $\nu_z \approx 0.1$ が要求される．ところが，TSR現有の高周波システムの仕様では，この要求を満たすのに数十キロボルトレベルの電圧が必要となってしまう．この値は通常の加速器で用いられている加速電圧からすれば大したことはないが，システムの雑音など現実の不確定要素を考慮した場合，レーザー冷却された極

低温ビームに対して使うにはいかにも大きすぎる値である．

過去の実験報告を見る限り，バンチしたビームのレーザー冷却に際して使用されている高周波電圧の最大値は 100 ボルトにすら達していない[27)]．このような低電圧で $\nu_z \approx 0.1$ を実現するには，ビームのエネルギーを低くするか，高周波電磁場の周波数を大きくするか，あるいはその両方を考えなければならない．また，高周波系の問題だけでなく，どうやらベータトロンチューンの可動範囲が不十分なこともネックになっているらしい．これらの制約があるため，ありふれた技術以上のものを全く必要としないにもかかわらず，TSR や ASTRID で近い将来共鳴結合法が試される可能性は残念ながら低いといわざるをえないようである[28)]．

共鳴結合法によってビームが急速に冷却されると粒子密度が上昇する．このときクーロン斥力が効いて実効的なチューンは設計値よりも小さくなっていく．この空間電荷によるチューンのシフトにも注意を払わなければならない．一例として，断面が $(x/a)^2+(y/b)^2=1$ で表される楕円形をした連続ビーム中にイオンが一様に分布している場合を考えてみよう．単位長さ当たりのイオン数を N とすると，粒子数密度は

$$n = \begin{cases} \dfrac{N}{\pi ab} & \text{for} \quad \left(\dfrac{x}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{b}\right)^2 \le 1 \\ 0 & \text{for} \quad \left(\dfrac{x}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{b}\right)^2 > 1 \end{cases} \tag{3.17}$$

と書けるが，この n に対するポアソン方程式 (2.10) の解は

$$\phi = -\frac{qN}{2\pi\varepsilon_0}\left[\frac{x^2}{a(a+b)} + \frac{y^2}{b(a+b)}\right] \tag{3.18}$$

である．これを式 (2.9) に代入すると

$$H_\perp = \frac{p_x^2+p_y^2}{2} + \frac{1}{2}\left[K_x - \frac{2K_{\rm sc}}{a(a+b)}\right]x^2 + \frac{1}{2}\left[K_y - \frac{2K_{\rm sc}}{b(a+b)}\right]y^2 \tag{3.19}$$

を得る．$K_{\rm sc}$ はビームパービアンスと呼ばれる定数で，イオンの古典半径を r_p とするとき $K_{\rm sc} = 2Nr_p/\beta_0^2\gamma_0^3$ のように定義される．

式 (3.19) はビームを集束する力が空間電荷によって実質的に減少することを示している．密度が高くなればなるほど個々の粒子が感じる集束力は弱くなり，

クーロン斥力の強さと外部集束力の強さが一致したところでビームの安定性が失われる．このときチューンはゼロである．3次元レーザー冷却過程が進行するとチューンはゼロに近づいてゆき，初期的には満たされていた共鳴条件もいずれ破綻を来たしてしまうことになる．結局，共鳴条件からのずれが大きくなるにつれて横方向自由度の冷却効率は悪くなると予想される．

しかしながら，このチューンシフトの効果はクリスタルビームの生成を本質的に阻害するものにはならないと考えられる．というのも，共鳴結合法によってビーム密度が上昇すれば，今度は当初無視できたクーロン結合の効果が顕著になり始めるからである．いったんクーロン結合に頼ることができる状態になってしまえば，その後は共鳴の有無は問題ではなくなるはずである．前節で提示された分子動力学シミュレーションの結果も低温領域でのチューンシフトの本質的重要性を否定している．また，イオントラップを使った実験でも，現実に1本のレーザーでクーロン結晶を生成することに成功している[29]．結局，イオンビームのレーザー冷却に関する当面の最重要課題は「熱く希薄な初期ビームをいかにして高速3次元冷却するか」ということであり，この点について共鳴結合法はひとつのきわめて有力な回答を与えていると思う．

3.6　多色光による冷却（テーパー冷却法）

蓄積リングのラティス構造を正確に考慮し，かつ「進行方向自由度のみに冷却力が作用する」という仮定の下で実行された分子動力学シミュレーションにおいて，図3.6のような規則正しいイオン分布をもつ極低温ビームが得られた．この結果を見る限り，「現実の蓄積リングにレーザー冷却システムを据え付け，共鳴結合法を適用すれば，誰でも手軽にクリスタルビームが生成できるはずだ」と主張できるような気になってくる．だが，現実はそれほど甘くはない．確かに，図3.6の $^{24}Mg^{+}$ ビームはmKレベルの温度しかもたず，世の中のどんなビームよりもはるかに冷たい．これだけでも全く素晴らしい成果ではあるが，いかんせんわれわれが目指しているのはクリスタルビームの生成である．この最終目標からすれば，図3.6の結果には多少の不満が残るといわざるをえない．というのも，この図の結晶構造は不安定だからである．実際，冷却力を取り除くとイオン分布の規則性は速やかに崩壊し，ビーム温度もかなり上昇してしまう．

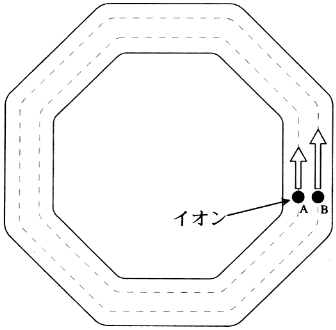


図 3.7　運動量分散による軌道長の変化

結晶構造が安定化しない理由は，ここまで繰り返し言及してきた蓄積リング特有の性質，すなわち“運動量分散の存在”に深く関係している．例えば，図 1.8 にあるような 3 次元のクリスタルビームを考えてみよう．結晶構造を形づくっている個々のイオンの相対的な位置関係は変化しないので，ある瞬間にイオン A とイオン B が併走していたとすると，理想的にはその後もこの 2 つのイオンは常に隣り合ったままリングを周回することになる——さもなければ，結晶構造を維持できない．ところが，運動量分散の効果によって，イオン A とイオン B の閉軌道長は異なっている(図 3.7)．長さの異なる閉軌道を同一の周期で周回するためには，リングの中心に近い軌道を走っているイオンほどその平均速度が遅くなければならない．図 3.7 の例では，イオン A の平均速度はイオン B のそれより幾分小さい必要がある．単色性の高い普通のレーザー光を用いてビームを冷却すると，進行方向自由度の速度成分はイオンの空間的位置とは無関係にある一定値に近づいていくことになる．このような散逸力はすべてのイオンの運動エネルギーを等しくするという点に関しては理想的であるが，クリスタルビームの素性には適合しないため，結晶構造をむしろ破壊してしまうのである．

クリスタルビームを安定化するには，個々のイオンの運動量が水平方向の位置座標 x に比例しているような平衡状態を創り出す特殊な散逸力が必要である[30,31]．この散逸効果をモデル化すると，例えば

$$\Delta\left(\frac{\delta p}{p}\right) = -\lambda_s\left[\left(\frac{\delta p}{p}\right) - \gamma_0 C_{xz}\frac{x}{\rho_0}\right] \tag{3.20}$$

となる．ここで，λ_s は摩擦係数，C_{xz} は平衡状態における $\delta p/p$ と x の比を規定する“テーパー因子”である．上式の左辺は冷却セクション前後での $\delta p/p$ の変化量を表しており，安定な定常状態では当然 $\Delta(\delta p/p) = 0$ となる．すなわち，ビームが完全に結晶化した時点で $\delta p/p = \gamma_0 C_{xz}x/\rho_0$ が成立し，大きな運動量をもつイオンほどリングの中心から遠い軌道を走ることになる．このような散逸力に基づいた冷却法を“テーパー冷却法（tapered cooling）”と呼んでいる[22]．なお，テーパー因子 C_{xz} には最適値が存在し，その値は蓄積リング上のどこに冷却セクションを置くかによって変化する．この意味で，テーパー因子は定数というよりはむしろ独立変数 s の関数である．

テーパー散逸力はクリスタルビームの安定化にとって都合が良いだけでなく，式 (3.20) からわかるように，進行方向自由度と横方向自由度との間に自然な結合を生む．したがって，§3.2 や 3.3 で考察したような結合源がなくとも，きわめて効率の良い 3 次元的なビーム冷却が実現できる．また，必ずしも共鳴条件を必要としないので，バンチしたビームのみならず連続的なビームに対しても有効である．もっとも，「テーパー散逸力をいかにして生み出すか」という問題に対する現実的な解答は今のところ得られていない．レーザー冷却法の原理から明らかなように，冷却完了後のイオンの運動量はレーザーの周波数に依存して決まるので，単色性の高い連続レーザー光を使ったのでは散逸力の“テーパー化”は不可能である．

テーパー散逸力を用意するには，まず使用する光の周波数にある幅をもたせなければならない．しかも，その周波数成分が実空間座標と線形の相関をもっていることが必要である．（つまり，進行方向に向かって右から左へ徐々に周波数が変化している虹のような光を創れ，ということである．）このようなテーパー化された光を手に入れるため，パルスレーザーを回折格子やプリズムで分光する方法や，音響光学素子を用いる方法，複数のレーザー光を利用する方法など，様々なアイデアが思い浮かぶが，要求される高い精度のテーパー化を実現するのは容易ではない．

テーパー因子の最適値を理論的に予言する方法を考えてみよう[22]．まず，結

晶化したビームは，大雑把にいって（あるいは平均的意味で），ほぼ一様なイオン分布をもっていることに注目する．3 次元結晶の断面は楕円形なので，集団平均化された連続的なクリスタルビームのスカラーポテンシャルとして式 (3.18) を仮定してもよかろう．また，式 (2.33) で導入された関数 $F_{\rm sc}$ を次のように定義する：

$$\frac{\Delta\tilde{E}}{\beta_0 c}F_{\rm sc} = -\left(\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial\tilde{x}}\right)_{\substack{\tilde{x}=0\\ \tilde{y}=0}} \tag{3.21}$$

この定義と式 (3.18) を用いると，ハミルトニアン (2.34) は相対時間 $\Delta\tilde{t}$ を進行方向の正準座標として

$$\tilde{H} = \frac{\tilde{p}_x^2+\tilde{p}_y^2}{2} + \frac{1}{2}\left[K_x - \frac{2K_{\rm sc}}{a(a+b)}\right]\tilde{x}^2 + \frac{1}{2}\left[K_y - \frac{2K_{\rm sc}}{b(a+b)}\right]\tilde{y}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\gamma_0^2} - \frac{D_{\rm sc}}{\rho}\right)\left(\frac{\Delta\tilde{E}}{\beta_0 c}\right)^2 \tag{3.22}$$

と書き表すことができ，同時に式 (2.33) は

$$\frac{{\rm d}^2 D_{\rm sc}}{{\rm d}s^2} + \left[K_x - \frac{2K_{\rm sc}}{a(a+b)}\right]D_{\rm sc} = \frac{1}{\rho} \tag{3.23}$$

となる．ハミルトニアン (3.22) では，横方向自由度の運動が進行方向自由度の運動から外見上分離されていることがわかる．また，ベータトロン運動を記述する部分は，双極磁石の効果を無視した式 (3.19) と形の上では全く同じであることもわかる．

式 (3.22) に基づいて進行方向の正準運動方程式を書き下すと $\Delta\tilde{E} = {\rm const.}$ であることがすぐにわかり，一方 $\Delta\tilde{t}$ に対して

$$\frac{{\rm d}\Delta\tilde{t}}{{\rm d}s} = -\left(\frac{1}{\gamma_0^2} - \frac{D_{\rm sc}}{\rho}\right)\frac{\Delta\tilde{E}}{(\beta_0 c)^2} \tag{3.24}$$

が得られる．式 (3.24) 右辺の係数は独立変数 s に依存しているが，これをリング一周にわたって平均し

$$\frac{{\rm d}\Delta\tilde{t}}{{\rm d}s} = \eta\frac{\Delta\tilde{E}}{(\beta_0 c)^2} \tag{3.25}$$

とする．η はスリップファクターと呼ばれる定数で

$$\eta = \frac{1}{2\pi R}\oint \frac{D_{\rm sc}}{\rho}{\rm d}s - \frac{1}{\gamma_0^2} \tag{3.26}$$

のように定義される．

このスリップファクターの定義式は，単粒子軌道力学で用いられる空間電荷効果を無視した場合の定義式と外見上全く同一である．唯一異なっているのは，運動量分散関数 $D_{\rm sc}$ は式 (2.21) ではなく，ここでは空間電荷のポテンシャルによって変更を受けた式 (3.23) を満足しているという点である．この空間電荷の影響は冷却過程の進行に伴ってどんどん大きくなり，運動量分散関数の形を歪めていく．その結果，スリップファクターの値も変化し，結局ビームが結晶化した時点で $\eta = 0$ になってしまうと考えられる．このとき，式 (3.25) は ${\rm d}\Delta\tilde{t}/{\rm d}s = 0$，あるいは $\Delta\tilde{t} = {\rm const.}$ となる．時間の原点を適当に選べば $\Delta\tilde{t} = 0$ とすることができるが，これはすべての粒子の回転周期が等しいことを意味している．

すでに示されたように，粒子の実空間座標 x はベータトロン振動の振幅 $\tilde{x}$ と運動量分散による閉軌道のずれ $x_D = D_{\rm sc}(\delta p/p)$ の和として表現できる．ところが，ビームが結晶化するとベータトロン振動は消失してしまうので $\tilde{x} = 0$ とおくことができ，したがって個々のイオンの軌道は運動量分散からの寄与 x_D のみに支配されることになる．テーパー散逸力 (3.20) による平衡条件が $\delta p/p = \gamma_0 C_{xz} x/\rho_0$ であったことを思い出し，この式に $x = x_D$ を代入すると

$$C_{xz} = \frac{\rho_0}{\gamma_0 D_{\rm sc}} \tag{3.27}$$

が導かれる．よって，式 (3.23) を解いて $D_{\rm sc}$ を求めれば，テーパー因子が決定できることになる．ここで問題なのは，ビームサイズを規定する関数 a および b の形がわかっていないことである．a と b があらかじめわかっていなければ，式 (3.23) は解きようがない．

そこでいま，これらの関数が満たす方程式として，パラメータ ε_x および ε_y を含む

$$\begin{cases} \dfrac{{\rm d}^2 a}{{\rm d}s^2} + K_x a - \dfrac{\varepsilon_x^2}{a^3} = \dfrac{2K_{\rm sc}}{a+b} \\[2ex] \dfrac{{\rm d}^2 b}{{\rm d}s^2} + K_y b - \dfrac{\varepsilon_y^2}{b^3} = \dfrac{2K_{\rm sc}}{a+b} \end{cases} \tag{3.28}$$

を考えてみる．上式は“エンベロープ方程式(envelope equation)”と呼ばれるもので，運動量分散が存在しない場合は，ブラソフ方程式 (2.13) およびハミル

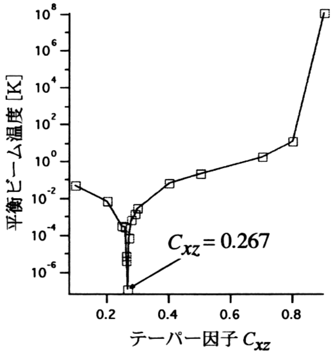


図 3.8　平衡ビーム温度のテーパー因子に対する依存性

縦軸は終状態における三自由度のビーム温度の和である．TARN II のラティス構造が仮定されており，ベータトロンチューンの値は $(\nu_x, \nu_y) = (1.68, 1.85)$ に設定されている．蓄積イオンは 1 MeV の $^{24}Mg^+$ で，その総数は 3.38×10^6 個である．

トニアン (3.19) とともに自己充足的な系を構成しうることが知られている[32)]．ただし，ここでは運動量分散の効果が本質的に重要な役割を果たしている力学系を考えているわけであるから，式 (3.28) は関数 a と b を理論的に決定するために導入された単なる仮定以上の何物でもない．この仮定の妥当性はシミュレーション計算の結果に照らして吟味されなければならない．なお，パラメータ ε_x と ε_y は条件 $\eta = 0$ が成立するように決めてやればよい．

上の理論から導き出される帰結と分子動力学シミュレーションの結果を比較してみる．再び TARN II に蓄積された 1 MeV の $^{24}Mg^+$ ビームを想定することにしよう．ただし，バンチしていないビーム，すなわち $\nu_z = 0$ の場合を考える．ベータトロンチューンは $(\nu_x, \nu_y) = (1.68, 1.85)$ とし，また結合定数 $\Gamma_q \approx 0.247$ をもつスキュー四重極磁石を計 12 台考慮する．図 3.8 はテーパー因子の値を振ってシミュレーションを行い，冷却完了後に達成された各自由度のビーム温度の和がどのように変化したかを表したものである．ここで用いられた TARN II のラティス構造は $C_{xz} = 0.267$ の辺りに最適点をもっていることがわかる．テーパー因子がこの最適値の近傍にある限り，ビームを結晶化させることが常に可能である．

次に，$C_{xz} = 0.267$ の場合のシミュレーションで得られたクリスタルビーム

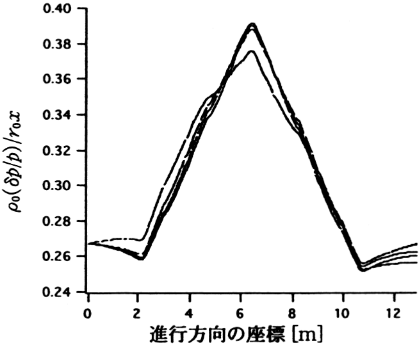


図 3.9　分子動力学シミュレーションの結果を基に算出された $\rho_0(\delta p/p)/\gamma_0 x$ の値の s 依存性 ($C_{xz} = 0.267$)

から無作為に10個の $^{24}Mg^+$ イオンを選ぶ．これら10個のイオンの座標データからそれぞれ $\rho_0(\delta p/p)/\gamma_0 x$ を算出し，その値を設計軌道に沿ってプロットしたものが図3.9である．横軸は12.95 m（周長77.7 mの1/6）までしかとっていないが，これはTARN IIがラティスの基本単位を6回繰り返した構造になっているためである．蓄積リングが含む単位ラティス構造の数は“ラティス周期数”と呼ばれている．つまり，TARN IIのラティス周期数は6である（因みに，ASTRIDのラティス周期数は，図1.5から明らかなように4である）．

図3.9はあるひとつの単位ラティス構造をイオンが通過する際に $\rho_0(\delta p/p)/\gamma_0 x$ の値がどう変わるかを表しているが，残る5つの単位構造の中でもその軌跡は本質的に同じである．多少の熱雑音は見られるが，10本の軌跡のすべてがほぼ重なり合っている．平衡条件 $\delta p/p = \gamma_0 C_{xz} x/\rho_0$ からわかるように，縦軸の $\rho_0(\delta p/p)/\gamma_0 x$ はテーパー因子そのものであり，したがって図3.9はテーパー因子の最適値が設計軌道に沿ってどのように変化するかを示しているといえる．

このシミュレーションで仮定されているパラメータに基づいて式(3.23)と(3.28)から運動量分散関数 $D_{\rm sc}$ を計算すると，図3.10(a)の実線が得られる．他方，空間電荷効果の影響を無視した場合の運動量分散関数（すなわち式(2.21)の解 D）が点線である．いずれの曲線も似通った形をしているが，その絶対値は約3倍も異なっている．この結果と式(3.27)からテーパー因子を求めると図

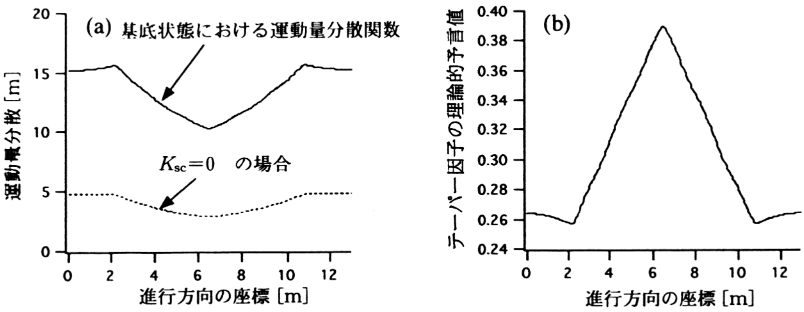


図 3.10　理論的予言

(a) は設計軌道に沿って運動量分散関数がどのように変化するかを表している．点線は空間電荷を無視した場合の運動量分散関数，すなわち式 (2.21) の解をプロットしたものである．一方，実線はビームが結晶化した時点での運動量分散関数で，式 (3.23) を式 (3.28) とともに条件 $\eta=0$ の下で解いた結果である．(b) は，(a) の結果に基づいて式 (3.27) から計算されたテーパー因子の値である．図 3.9 のシミュレーション結果とほぼ完璧に一致していることがわかる．

3.10(b) が得られる．分子動力学シミュレーションの結果(図 3.9)と比べると，その一致は驚くほどである．

3.7　低温ビームの安定性

ここまでの話はイオンビームを極限まで冷却するための方法論に主眼を置いていた．が，冷却法とは別に，もうひとつ考えておかなければならないポイントがある．それは，ビームそのものの安定性の問題である．そもそも極低温ビームが常に安定であるかどうかは保証されておらず，「理想的な冷却力を用意しさえすれば必ずクリスタルビームに到達できる」とは断言できない．この問題に関する研究は，当初系統的な分子動力学シミュレーションに基づいて進められ，その結果クリスタルビームの生成に適したラティス構造とそうでないラティス構造があることが判明した[15]．具体的には，次の 2 つの条件を同時に満足している蓄積リング以外では，ビームの結晶化は実現できないことがわかっている：

[第一条件]　ビームのエネルギーがトランジションエネルギー $\gamma_T{}^*$ よりも小さいこと，すなわち

---

* 式 (3.26) で右辺第一項の中の D_{sc} を式 (2.21) の解 D に置き換え，さらに条件 $\eta=0$ を課したときのビームエネルギー，すなわち $\gamma_T=\left(\frac{1}{2\pi R}\oint\frac{D}{\rho}\mathrm{d}s\right)^{-1/2}$ をトランジションエネルギーと呼ぶ．

$$\gamma < \gamma_T \tag{3.29}$$

[第二条件]　ベータトロンチューンがラティス周期数 N_ℓ を $2\sqrt{2}$ で割った値よりも小さいこと，すなわち

$$\max(\nu_x, \nu_y) < \frac{N_\ell}{2\sqrt{2}} \tag{3.30}$$

第一条件は，小型のイオンビーム蓄積リングでは普通問題なく満たされている．厄介なのは第二条件である．TSR や ASTRID のラティス周期数は 4 であるから，条件 (3.30) を成立させるには ν_x と ν_y が共に $\sqrt{2}$ よりも小さくなければならない．ところが，これらのリングで実際に使用されているベータトロンチューンの値は 2 を越えている（四重極磁石の磁場勾配を調節してチューンを幾分小さくすることはできるが，$\sqrt{2}$ を下回るところまでは行かないようである）．つまり，レーザー冷却システムを完備している既存のリングはいずれも，第一条件は満足しているものの，第二条件は完全に破っているわけである．

式 (3.30) は，ビームが周期的な外力を受けているために起こる一種のパラメータ共鳴を回避するのに必要な条件である．この式はしばしば“クリスタルビームの維持条件(maintenance condition)”と呼ばれるが，別にクリスタルビームに特有の物理を含んでいるわけではない．事実，結晶化していない一般のビームに対しても，共鳴に関して類似の条件を導くことができる．条件 (3.30) を満たしていない蓄積リング中でレーザー冷却されたビームはいずれパラメータ共鳴の禁止帯にぶつかってしまうため，そのベータトロン運動は不安定となる．こうなると，それ以上の冷却は無理で，クリスタルビームを生成することは原理的に不可能である．

図 3.4 で横方向自由度の最終ビーム温度が進行方向自由度のそれよりもかなり高いのは，ASTRID のラティス構造が条件 (3.30) を破っているからであると考えられる．ただ，この共鳴不安定性によってビームが無制限に発散してしまうことは幸いにしてない．共鳴によってビームサイズが大きくなると，その分密度が下がって条件が変化するため，結果的に不安定性の進行が抑止されるからである．一方，TARN II のラティス周期数は 6 であるから，ベータトロンチューンの値がおよそ 2.12 以下であれば第二条件は満たされる．図 3.5 や図

3.6 のシミュレーションでは実際にこのしきい値より小さいチューンが用いられており，結果として，不均衡のないビーム温度や規則的なイオン分布が得られたというわけである．

3.8 展　　望

蓄積リング中の高速イオンビームを，その初期密度に関係なく，高い効率で3次元的にレーザー冷却するための方法として“共鳴結合法”と“テーパー冷却法”の2つを検討してきた．これらの方法にはそれぞれ一長一短があるが，いずれも“クリスタルビームの生成”という大目標に向けての有力な手段と見なされている．一方で今後の課題もいくつか明らかとなった．例えば，テーパー光のような非常に特殊な光を高い精度で発生させることが果たして可能なのかどうかを十分に吟味しなければならない．そのためには，レーザー技術の専門家との連携が必要不可欠である．また，レーザー冷却セクションにおけるテーパー因子の変化をどう取り扱うかも問題である．

テーパー因子は座標 s の関数なので(図 3.10(b))，その冷却セクション中での変化量を許容範囲内に抑えるようなラティスを組む必要があるだろう．四重極磁石や高周波空胴などのラティス構成要素が不可避的に含む誤差も頭痛の種となりうる．人間が作ったものは多かれ少なかれ理想からはずれており，蓄積リングもまた例外ではない．したがって，厳密にいえば，世の中のありとあらゆるリングのラティス周期数は1である．このとき条件 (3.30) より，ベータトロンチューンは 0.354 より小さいことが必要になるが，この値は非現実的なものである．クリスタルビーム生成用の蓄積リングを建設するにあたってはあらゆる部品の工作・設置精度に注意を払い[33]，少なくとも近似的に条件 (3.30) を成立させるよう努力しなければならない．ビームの結晶化に成功した場合，それを疑問の余地なく証明する計測法の開発も必要である．イオントラップ中のクーロン結晶は実験室系で静止しているので，写真に撮ることができた．しかしながら，高速で走っているクーロン結晶の詳細を写真に収めるのは容易ではなかろう．

以上，解決すべき課題は依然として残ってはいるものの，まず条件 (3.29) と (3.30) を満足している蓄積リングにレーザー冷却システムを導入することが先

決であると思う．TSR と ASTRID がもつビームダイナミックス的性質は偶然にも似通っており，しかもその性質がクリスタルビームにとって都合の悪いものであるがため，今後これらのリングでレーザー冷却に関して劇的な進展を見ることは（ラティス構造を大幅に変更しない限り）難しいと結論せざるをえない．レーザー冷却法の潜在能力を 100％引き出すためには，例えば，TARN II のようなリングを使って実験を行ってみなければならない．進行方向自由度の平衡温度に関する過去の実績を見る限り，条件 (3.29) と (3.30) の成立している蓄積リングでレーザー冷却実験を行えば，比較的容易にクリスタルビームに後一歩のところまで到達できる可能性がある．少なくとも，電離気体相から液体相へのビーム相転移を実現することは難なくできるはずだと私は考えている．

参考文献

1) 最近では，ビーム物理（とりわけ加速器ビームの基礎理論）に関する専門書が数多く出版されている．すべてを列挙することは到底不可能なので，代表的なものをいくつか紹介するにとどめておく．
J. D. Lawson : The Physics of Charged-Particle Beams, Oxford Science Publications (1988)
A. W. Chao : Physics of Collective Beam Instabilities in High Energy Accelerators, Wiley Series in Beam Physics and Accelerator Technology, John Wiley & Sons, INC. (1993)
M. Reiser : Theory and Design of Charged Particle Beams, 同上 (1994)
E. Forest : Beam Dynamics, The Physics and Technology of Particle and Photon Beams Vol. 8, Harwood Academic Publishers (1998)
S. Y. Lee : Accelerator Physics, World Scientific Publishing Co. (1999)
2) http://www.aps.org/units/dpb/
3) http://www-acc-theory.kek.jp/BP/BPclub.html
4) 例えば，Proceedings of *Workshop on Beam Cooling and Related Topics*, CERN 94-03 (Montreux, Switzerland, 1994)
5) S. Schröder *et al.*: *Phys. Rev. Lett.*, **64**, 2901 (1990)
6) J. S. Hangst *et al.*: *Phys. Rev. Lett.*, **67**, 1238 (1991)
7) 例えば，J. Dalibard *et al.* (ed.): *Fundamental Systems in Quantum Optics, Les Houches, Session LIII*, 1990 (Elsevier, Amsterdam, 1992)
8) H. Okamoto, A. M. Sessler & D. Möhl: *Phys. Rev. Lett.*, **72**, 3977 (1994)
9) H. Okamoto: *Phys. Rev.*, E**50**, 4982 (1994)
10) H-J. Miesner *et al.*: *Phys. Rev. Lett.*, **77**, 623 (1996)
11) V. V. Parkhomchuk & N. S. Dikansky: *Sov. Journ. of Tech. Phys.*, **50**, 1411 (1980)
12) E. E. Dement'ev *et al.*: *Zh. Teck. Fiz.*, **50**, 1717 (1980); English transl. *Sov. Phys. Tech. Phys.*, **50**, 1001 (1980)
13) J. P. Schiffer & P. Kienle: *Z. Phys.*, A **321**, 181 (1985)
14) A. Rahman & J. P. Schiffer: *Phys. Rev. Lett.*, **57**, 1133 (1986)
15) J. Wei, X-P. Li & A. M. Sessler: *Phys. Rev. Lett.*, **73**, 3089 (1994)
16) F. Diedrich *et al.*: *Phys. Rev. Lett.*, **59**, 1931 (1987)

17) J. N. Tan *et al.*: *Phys. Rev. Lett.*, **75**, 4198 (1995)
18) M. Drewsen *et al.*: *Phys. Rev. Lett.*, **81**, 2878 (1998)
19) G. Birkl, S. Kassner & H. Walther: *Nature*, **357**, 310 (1992)
20) H. Okamoto & H. Tanaka : *Nucl. Instrum. Meth.*, A**437**, 178 (1999)
21) T. Suzuki : *Part. Accel.*, **18**, 115 (1985)
22) H. Okamoto & J. Wei : *Phys. Rev.*, E **58**, 3817 (1998)
23) T. Kihara *et al.*: *Phys. Rev.*, E **59**, 3594 (1999)
24) SAD の詳細については，http://www-acc-theory.kek.jp/SAD/sad.html を参照するとよい．
25) 例えば，J. Wei, X.-P. Li & A. M. Sessler: BNL Report, BNL-52387 (1993)
26) 例えば，T. Katayama *et al.*: in *Proceedings of the 2nd European Particle Accelerator Conference*, edited by P. Martin and P. Mandrillon, 577 (1990)
27) J. S. Hangst *et al.*: *Phys. Rev. Lett.*, **74**, 4432 (1995)
28) I. Lauer *et al.*: *Phys. Rev. Lett.*, **81**, 2052 (1998);
この論文では，レーザー光の中心をイオンビームの軌道軸からわずかにずらして冷却を行った場合の実験結果が報告されている．レーザーをずらせばトータルの冷却効率は下がるが，冷却セクションにおける運動量分散を通じて結合が生じるため，水平方向に弱いが人為的な散逸効果が現れる．この効果を鉛直方向に拡張するため，この実験ではソレノイド磁場を立ち上げた上でなんと差共鳴条件 $\nu_x - \nu_y \approx 0$ を試しており，その結果実際に鉛直方向自由度の冷却効率が水平方向自由度のそれと全く同じレベルまで改善されることが確認されている．この事実は共鳴結合法が原理的に正しいことを示すものである．
29) I. Waki, S. Kassner, G. Birkl & H. Walther : *Phys. Rev. Lett.*, **68**, 2007 (1992)
30) J. P. Schiffer : Crystalline Beams and Related Issues (World Scientific, Singapore, 1996) 217; J. Wei *et al.*: ibid. 229.
31) J. Wei, H. Okamoto & A. M. Sessler : *Phys. Rev. Lett.*, **80**, 2606 (1998)
32) I. M. Kapchinsky & V. V. Vladimirsky : Proceedings of the International Conference on High Energy Accelerators (CERN, Geneva, 1959) 274
33) J. Wei & A. M. Sessler : in Proceedings of the 5th European Particle Accelerator Conference, edited by S. Myers, A. Pacheco, R. Pascual, Ch. Petit-Jean-Genaz & J. Poole, 1179 (1996);
この論文によれば，クリスタルビームの生成を目的とした蓄積リングが含む磁場誤差の許容範囲は 0.1%以下である．この程度の精度で蓄積リングを組み立てることは，現在の技術をもってすれば十分可能である．

著者略歴

長島　順清（ながしま　よりきよ）

1965 年　東京大学大学院博士課程修了
専　攻　高エネルギー物理学
現　在　大阪大学大学院理学研究科教授　理学博士

早川　尚男（はやかわ　ひさお）

1991 年　九州大学大学院理学研究科博士課程修了
専　攻　理論物理学
現　在　京都大学大学院人間・環境学研究科助教授　理学博士

那須野　悟（なすの　さとる）

1990 年　東北大学大学院工学研究科博士課程修了
専　攻　物性物理学
現　在　九州工業大学工学部助教授　工学博士

岡本　宏巳（おかもと　ひろみ）

1989 年　京都大学大学院理学研究科博士課程修了
専　攻　ビーム物理学
現　在　広島大学大学院先端物質科学研究科助教授　理学博士

現代物理最前線 1

2000 年 4 月 1 日　初版 1 刷発行

編者　大槻義彦　© 2000

発行　**共立出版株式会社**／南條光章
東京都文京区小日向 4 丁目 6 番 19 号
電話　東京(03)3947-2511 番（代表）
郵便番号 112-8700
振替口座 00110-2-57035 番
URL　http://www.kyoritsu-pub.co.jp/

印刷　加藤文明社
製本　中條製本

社団法人
自然科学書協会
会員

検印廃止
NDC 420

ISBN 4-320-03386-8

Printed in Japan